



O'ZMU XABARLARI

ВЕСТНИК НУУЗ

АСТА NUUZ

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETINING ILMIY JURNALI

**JURNAL 1997
YILDAN
CHIQA
BOSHLAGAN**

**2024
2/1
Aniq
fanlar**

Bosh muharrir:

MADJIDOV I. U. — t.f.d., professor

Bosh muharrir o'rinbosari:

ERGASHOV Y. S. — f.-m.f.d., professor

Tahrir hay'ati:

Ayupov Sh. A. – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi

Alimov Sh. A. – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi

Sadullayev A. – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi

Roziqov O'. A. – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi

Aripov M. M. – f.-m.f.d., prof.

Ashurov R. R. – f.-m.f.d., prof.

Abdushukurov A. A. – f.-m.f.d., prof.

Zikirov O. S. – f.-m.f.d., prof.

Aloyev R. J. – f.-m.f.d., prof.

Ganixodjayev R. N. – f.-m.f.d., prof.

Narmonov A. Y. – f.-m.f.d., prof.

Omirov B. A. – f.-m.f.d., prof.

Raximov A. A. – f.-m.f.d., prof.

Beshimov R. B. – f.-m.f.d., prof.

Shoimqulov B. A. – f.-m.f.d., prof.

Xayotov A. – f.-m.f.d., prof.

Xudoyberdiyev A. – f.-m.f.d., prof.

Xudoyberganov G. – f.-m.f.d., prof.

Matyakubov A. S. – f.-m.f.d., prof.

Mas'ul kotib: f.-m.f.d. (PhD) **G'aybullayev R.Q.**

MUNDARIJA
CONTENTS
СОДЕРЖАНИЕ

Arzikulov Z. O. Particular solutions of the three dimensional singular ultra hyperbolic equation with the parameter	3
Atabayeva D. J., Buvayev Q. T. Ikki karrali furiye qatorining uchburchakli qismaniy yig'indilari uchun lebeg o'zgarmasini asimptotik holati haqida	15
Bahronov B.I. Panjaradagi uch zarrachali sistemaga mos model operator muhim spektrining joylashuv o'rni	25
Begulov U.U., Khaydarov A.T., Salimov J.I. Mathematical modeling of the double nonlinear exponential inhomogeneous density heat dissipation process	34
Berdimuradov M. B. Estimation of unknown parameter of gamma distribution in incomplete models of statistics	43
Ergashov O. H. Bir kvadratik nostoxastik operatorning ba'zi xarakteristikalari haqida	53
Khudaybergenov K. K. Neural networks with multidimensional weight connections in regression problems	60
Muzaffarova M. U. Bitta uzluksiz vaqtli dinamik sistemaning dinamikasi haqida	72
Norqulov O.M. Panjaradagi ikki zarrachali sistemaga mos fridriks modeli tipidagi operatorning spektri va rezolventasi	83
Rakhimov A.A., Rakhmonova N.V. The center-valued quasitraces on a finite real AW^* -algebras	91
Tulakova Z. R. Appell hypergeometric function with applications to the boundary value problems for the three-dimensional bi-axially symmetric singular elliptic equation	98
Буваев К.Т. Почти всюду сходимость спектральных разложений функций из $L_2^g(T^N)$	111
Жураев Т.Ф., Мухамадиев Ф.Г. О некоторых подпространствах суперрасширения топологического пространства являющихся Q -многообразий	118
Ким Д.И. Вещественные AW^* -алгебры имеющие не W^* -абелевы AW^* -подалгебры	125
Кудайбергенов К. К., Муминов З. И. Нейронные сети на основе радиально-базисных функций с множественными весовыми соединениями для задач классификации	131
Муминов. У. Р, Ганиходжаев Р. Н. Маршруты траекторий операторов Лотки-Вольтерра действующих на симплексе S^4	143
Рахмонов Ф.Д. Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения типа Бенни-Люка высокого порядка с нелинейной функцией переопределения	152
Туйчиева С.Т., Садуллаева М.З. Моделирования сейсмических волновых полей в однородной пористой среде.	168

UDC 517.956.22

PARTICULAR SOLUTIONS OF THE THREE DIMENSIONAL SINGULAR
ULTRA HYPERBOLIC EQUATION WITH THE PARAMETER

Arzikulov Z. O. *

RESUME

The main result of the present paper is the construction of the particular solutions of the second order ultra hyperbolic equation with the singular coefficients and spectral parameter, which could be expressed in terms of a confluent hypergeometric function in four variables.

Key words: singular ultra hyperbolic equation, hyperbolic equation with parameter, particular solutions, multiple confluent hypergeometric functions.

Introduction

Hypergeometric functions in one and more variables occur naturally in a wide variety of problems in applied mathematics, statistics, operations research, theoretical physics, and engineering sciences. For instance, Srivastava and Kashyap [1] presented a number of interesting applications of hypergeometric functions in one and more variables in queuing theory and related stochastic processes. The work of Niukkanen [2] on the multiple hypergeometric functions is motivated by various physical and quantum chemical applications of such functions. Especially, many problems in gas dynamics lead to solutions of degenerate second-order partial differential equations which are then solvable in terms of multiple hypergeometric functions. Among examples, we can cite the problem of adiabatic flat-parallel gas flow without whirlwind, the flow problem of supersonic current from vessel with flat walls, and a number of other problems connected with gas flow [3]. Applications of hypergeometric functions to the solution of boundary value equations for degenerate and singular partial differential equations in recent years can be found, for instance, in works [4, 5, 6, 7, 8, 9].

In the literature, hypergeometric functions are divided into two types: complete and confluent (for definitions see [10]). In all respects, confluent hypergeometric functions including the decomposition formulas, have been little studied in comparison with other types of hypergeometric functions, especially when the dimension of the variables exceeds two. Srivastava and Karlsson [12] have investigated 205 complete hypergeometric functions in three variables. Certain triple confluent series were considered by Jain [13] and Exton [14], but the entire set has not been given until recently. Ergashev *et al.*[15], in 2022, defined 395 confluent hypergeometric functions in three variables and denoted them by $E_1 - E_{395}$; they thus completed the set of all possible second-order confluent triple hypergeometric functions.

In the present work we will establish that all particular solutions of the singular ultra hyperbolic equation

$$u_{tt} + \frac{2\gamma}{t}u_t = u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \lambda u, \quad (1)$$

*Arzikulov Z. O. – Fergana Polytechnic Institute, Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers – National Research University, zafarbekarzikulov1984@gmail.com

in the domain $\{(x, y, t) : x > 0, y > 0, t > 0\}$ are expressed in terms of the confluent hypergeometric function in four variables, where $\alpha > 0, \beta > 0$ and $\gamma > 0$ are constants with $0 < 2\alpha, 2\beta, 2\gamma < 1$; λ is a real number.

Note, all fundamental solutions of the multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients

$$\sum_{k=1}^n u_{x_k x_k} + \frac{2\alpha_1}{x_1} u_{x_1} + \frac{2\alpha_2}{x_2} u_{x_2} + \frac{2\alpha_3}{x_3} u_{x_3} + \lambda u = 0 \quad (2)$$

are also expressed by the confluent hypergeometric function in four variables [2]. In case of $\lambda = 0$, 8 particular solutions of equation (1) are written by the complete Lauricella hypergeometric function $F_A^{(3)}$ in three variables [17]. An explicit solution to the Cauchy problem for the singular hyperbolic equation

$$u_{xx} + \frac{2\alpha}{x} u_x = u_{yy} + \frac{2\beta}{y} u_y + \lambda u = 0, \quad 0 < 2\alpha, 2\beta < 1 \quad (3)$$

in the characteristic triangle and all fundamental solutions of the bi-axially symmetric Helmholtz equation

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\alpha}{x} u_x + \frac{2\beta}{y} u_y + \lambda u = 0, \quad x > 0, y > 0, 0 < 2\alpha, 2\beta < 1 \quad (4)$$

are found in [18] and [19], respectively, which are expressed by the same confluent hypergeometric function in three variables.

We give some following notation and definitions, which will be used in the next sections.

CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTION IN FOUR VARIABLES

A symbol $(\kappa)_\nu$ denotes the general Pochhammer symbol or the shifted factorial, since $(1)_l = l!$ ($l \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$), which is defined (for $\kappa, \nu \in \mathbb{C}$), in terms of the familiar Gamma function, by

$$(\kappa)_\nu := \frac{\Gamma(\kappa + \nu)}{\Gamma(\kappa)} = \begin{cases} 1 & (\nu = 0; \kappa \in \mathbb{C} \setminus \{0\}), \\ \kappa(\kappa + 1) \dots (\kappa + \nu - 1) & (\nu = l \in \mathbb{N}; \kappa \in \mathbb{C}), \end{cases}$$

it is being understood conventionally that $(0)_0 := 1$ assumed tacitly that the Γ -quotient exists.

Consider the following Lauricella hypergeometric functions in n variables [20]:

$$F_A^{(n)}(a, \mathbf{b}; \mathbf{c}; \mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(a)_{|\mathbf{k}|} (b_1)_{k_1} \dots (b_n)_{k_n}}{k_1! \dots k_n! (c_1)_{k_1} \dots (c_n)_{k_n}} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \\ [|x_1| + \dots + |x_n| < 1], \\ F_B^{(n)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{c}; \mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{k_1} \dots (a_n)_{k_n} (b_1)_{k_1} \dots (b_n)_{k_n}}{k_1! \dots k_n! (c)_{|\mathbf{k}|}} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \\ [|x_1| < 1, \dots, |x_n| < 1].$$

where

$$\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_n), \quad \mathbf{b} := (b_1, \dots, b_n), \quad \mathbf{c} := (c_1, \dots, c_n);$$

$$\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n), \quad |\mathbf{k}| := k_1 + \dots + k_n, \quad k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0.$$

An interesting unification (and generalization) of Lauricella's multivariable functions and Horn's two variables functions was considered by Erdelyi in 1939, who defined his general functions in the form [21] (see also [12, p.74, (4b)]):

$$\begin{aligned} & H_{n+p,n}(a, b_1, \dots, b_{n+p}, d_{n+1}, \dots, d_{n+p}; c_1, \dots, c_n; \xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_p) = \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_{n+p}=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n-m_{n+1}-\dots-m_{n+p}} (b_1)_{m_1} \dots (b_{n+p})_{m_{n+p}} (d_{n+1})_{m_{n+1}} \dots (d_{n+p})_{m_{n+p}}}{m_1! \dots m_{n+p}! (c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n}} \\ & \quad \cdot \xi_1^{m_1} \dots \xi_n^{m_n} \eta_1^{m_{n+1}} \dots \eta_p^{m_{n+p}}, \end{aligned} \quad (5)$$

where p and n are nonnegative integers.

Evidently, we have

$$H_{n,n} = F_A^{(n)}, \quad H_{n,0} = F_B^{(n)}, \quad H_{2,1} = H_2,$$

where H_2 is famous Horn function [11]:

$$H_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta; \varepsilon; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m-n} (\beta)_m (\gamma)_n (\delta)_n}{m! n! (\varepsilon)_m} x^m y^n.$$

From the hypergeometric function (5) we shall define the following confluent hypergeometric function

$$\begin{aligned} & H_A^{(n,p)}(a, b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; \xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_p) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{n+p,n} \left(a, b_1, \dots, b_n, \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}, \dots, \frac{1}{\varepsilon}}_{2p}; c_1, \dots, c_n; \xi_1, \dots, \xi_n, \varepsilon^2 \eta_1, \dots, \varepsilon^2 \eta_p \right). \end{aligned}$$

For the determination of the hypergeometric function $H_A^{(n,p)}$ the equality [22, p.124] $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1/\varepsilon)_q \cdot \varepsilon^q = 1$ (q is a natural number) has been used and the found confluent hypergeometric function is represented as

$$\begin{aligned} & H_A^{(n,p)}(a, \mathbf{b}; \mathbf{c}; \xi, \eta) = H_A^{(n,p)} \left[\begin{matrix} a, b_1, \dots, b_n; \\ c_1, \dots, c_n; \end{matrix} \xi, \eta \right] \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_{n+p}=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n-m_{n+1}-\dots-m_{n+p}} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{m_1! \dots m_{n+p}! (c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n}} \xi_1^{m_1} \dots \xi_n^{m_n} \eta_1^{m_{n+1}} \dots \eta_p^{m_{n+p}}, \end{aligned} \quad (6)$$

where $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\eta := (\eta_1, \dots, \eta_p)$ and $|\xi_1| + \dots + |\xi_n| < 1$.

The particular cases of confluent hypergeometric functions were known: in the case of two variables [10, p.231, (31)]

$$H_3(a, b; c; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m-n} (b)_m}{m! n! (c)_m} x^m y^n, \quad |x| < 1$$

and in the case of three variables [19]

$$A_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y, z) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n-k} (b_1)_m (b_2)_n}{m! n! k! (c_1)_m (c_2)_n} x^m y^n z^k, \quad |x| + |y| < 1.$$

The confluent hypergeometric function $H_A^{(n,p)}$ has the following formula of derivation:

$$\frac{\partial^{I+J}}{\partial \xi_1^{i_1} \dots \partial \xi_n^{i_n} \partial \eta_1^{j_1} \dots \partial \eta_p^{j_p}} H_A^{(n,p)}(a, \mathbf{b}; \mathbf{c}; \xi, \eta) = \frac{(a)_{I-J} (b_1)_{i_1} \dots (b_n)_{i_n}}{(c_1)_{i_1} \dots (c_n)_{i_n}} \times H_A^{(n,p)}(a + I - J, b_1 + i_1, \dots, b_n + i_n; c_1 + i_1, \dots, c_n + i_n; \xi, \eta), \quad (7)$$

where $I := i_1 + \dots + i_n$, $J := j_1 + \dots + j_p$.

Using the formula of derivation (7) it is easy to show that the confluent hypergeometric function in (6) satisfies the following system of hypergeometric equations

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_i (1 - \xi_i) \omega_{\xi_i \xi_i} - \xi_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \xi_j \omega_{\xi_i \xi_j} + \xi_i \sum_{j=1}^p \eta_j \omega_{\xi_i \eta_j} + [c_i - (a + b_i + 1) \xi_i] \omega_{\xi_i} \\ - b_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \xi_j \omega_{\xi_j} + b_i \sum_{j=1}^p \eta_j \omega_{\eta_j} - ab_i \omega = 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ \sum_{l=1}^p \eta_l \omega_{\eta_l \eta_j} - \sum_{l=1}^n \xi_l \omega_{\xi_l \eta_j} + (1 - a) \omega_{\eta_j} + \omega = 0, \quad j = \overline{1, p}, \end{array} \right. \quad (8)$$

where $\omega(\xi, \eta) = H_A^{(n,p)}(a, b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; \xi, \eta)$.

Consider the following multiple confluent hypergeometric function in four variables [2]

$$H_A^{(3,1)}(a, b_1, b_2, b_3; d_1, d_2, d_3; x, y, z, t) = \sum_{m,n,k,l=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n+k-l} (b_1)_m (b_2)_n (b_3)_k}{(d_1)_m (d_2)_n (d_3)_k} \frac{x^m y^n z^k t^l}{m! n! k! l!}, \quad |x| + |y| + |z| < 1 \quad (9)$$

which satisfies the system of the partial differential equations

$$\left\{ \begin{array}{l} x(1-x)\omega_{xx} - xy\omega_{xy} - xz\omega_{xz} + xt\omega_{xt} \\ + [d_1 - (a + b_1 + 1)x]\omega_x - b_1 y \omega_y - b_1 z \omega_z + b_1 t \omega_t - ab_1 \omega = 0, \\ y(1-y)\omega_{yy} - xy\omega_{xy} - yz\omega_{yz} + yt\omega_{yt} \\ - b_2 x \omega_x + [d_2 - (a + b_2 + 1)y]\omega_y - b_2 z \omega_z + b_2 t \omega_t - ab_2 \omega = 0, \\ z(1-z)\omega_{zz} - xz\omega_{xz} - yz\omega_{yz} + zt\omega_{zt} \\ - b_3 x \omega_x - b_3 y \omega_y + [d_3 - (a + b_3 + 1)z]\omega_z + b_3 t \omega_t - ab_3 \omega = 0, \\ t\omega_{tt} - x\omega_{xt} - z\omega_{zt} + (1-a)\omega_t + \omega = 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

Having substituted

$$\omega(x, y, z, t) = x^\tau y^\nu z^\mu t^\rho \psi(x, y, z, t)$$

to the system of hypergeometric equations (10), it is possible to find 8 linearly independent solutions of system (10), which are given in the table form

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
τ	0	$1 - d_1$	0	0	$1 - d_1$	$1 - d_1$	$1 - d_1$	$1 - d_1$
ν	0	0	$1 - d_2$	0	$1 - d_2$	$1 - d_2$	$1 - d_2$	$1 - d_2$
μ	0	0	0	$1 - d_3$	0	$1 - d_3$	$1 - d_3$	$1 - d_3$
ρ	0	0	0	0	0	0	0	0

or in explicit form as follows

$$\omega_1 = H_A^{(3,1)}(a; b_1, b_2, b_3; d_1, d_2, d_3; x, y, z, t), \quad (11)$$

$$\omega_2 = x^{1-d_1} H_A^{(3,1)}(a+1-d_1; b_1+1-d_1, b_2, b_3; 2-d_1, d_2, d_3; x, y, z, t), \quad (12)$$

$$\omega_3 = y^{1-d_2} H_A^{(3,1)}(a+1-d_2; b_1, b_2+1-d_2, b_3; d_1, 2-d_2, d_3; x, y, z, t), \quad (13)$$

$$\omega_4 = z^{1-d_3} H_A^{(3,1)}(a+1-d_3; b_1, b_2, b_3+1-d_3; d_1, d_2, 2-d_3; x, y, z, t), \quad (14)$$

$$\omega_5 = x^{1-d_1} y^{1-d_2} H_A^{(3,1)}(a+2-d_1-d_2; b_1+1-d_1, b_2+1-d_2, b_3; 2-d_1, 2-d_2, d_3; x, y, z, t), \quad (15)$$

$$\omega_6 = x^{1-d_1} z^{1-d_3} H_A^{(3,1)}(a+2-d_1-d_3; b_1+1-d_1, b_2, b_3+1-d_3; 2-d_1, d_2, 2-d_3; x, y, z, t), \quad (16)$$

$$\omega_7 = y^{1-d_2} z^{1-d_3} H_A^{(3,1)}(a+2-d_2-d_3; b_1, b_2+1-d_2, b_3+1-d_3; d_1, 2-d_2, 2-d_3; x, y, z, t), \quad (17)$$

$$\omega_8 = x^{1-d_1} y^{1-d_2} z^{1-d_3} H_A^{(3,1)}(a+3-d_1-d_2-d_3; b_1+1-d_1, b_2+1-d_2, b_3+1-d_3; x, y, z, t). \quad (18)$$

REDUCTION OF THE EQUATION (1) TO A SYSTEM, SATISFIED BY THE QUADRUPLE CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTION.

Solution of the singular ultra hyperbolic equation with the parameter (1) is searched in the form

$$u = P\omega(\xi, \eta, \zeta, \theta), \quad (19)$$

where

$$P = r^{-2\delta}, \quad \delta = \alpha + \beta + \gamma + \frac{1}{2}, \quad (20)$$

$$\xi = -\frac{4xx_0}{r^2}, \quad \eta = -\frac{4yy_0}{r^2}, \quad \zeta = \frac{4tt_0}{r^2}, \quad \theta = \frac{1}{4}\lambda r^2,$$

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (t - t_0)^2, \quad r_1^2 = (x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (t - t_0)^2,$$

$$r_2^2 = (x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 - (t - t_0)^2, \quad r_3^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (t + t_0)^2;$$

$\omega(\xi, \eta, \zeta, \theta)$ is unknown function.

Calculating necessary derivatives from (19) and substituting them into (1), we obtain

$$\begin{aligned}
& A_1\omega_{\xi\xi} + A_2\omega_{\eta\eta} + A_3\omega_{\zeta\zeta} + A_4\omega_{\theta\theta} + B_1\omega_{\xi\eta} + B_2\omega_{\xi\zeta} + B_3\omega_{\xi\theta} + B_4\omega_{\eta\zeta} + \\
& + B_5\omega_{\eta\theta} + B_6\omega_{\zeta\theta} + C_1\omega_{\xi} + C_2\omega_{\eta} + C_3\omega_{\zeta} + C_4\omega_{\theta} + D\omega = 0,
\end{aligned} \tag{21}$$

where

$$\begin{aligned}
A_1 &= P\xi_x^2 + P\xi_y^2 - P\xi_t^2, & A_2 &= P\eta_x^2 + P\eta_y^2 - P\eta_t^2, \\
A_3 &= P\zeta_x^2 + P\zeta_y^2 - P\zeta_t^2, & A_4 &= P\theta_x^2 + P\theta_y^2 - P\theta_t^2, \\
B_1 &= 2P(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y - \xi_t\eta_t), & B_2 &= 2P(\xi_x\zeta_x + \xi_y\zeta_y - \xi_t\zeta_t), \\
B_3 &= 2P(\xi_x\theta_x + \xi_y\theta_y - \xi_t\theta_t), & B_4 &= 2P(\eta_x\zeta_x + \eta_y\zeta_y - \eta_t\zeta_t), \\
B_5 &= 2P(\eta_x\theta_x + \eta_y\theta_y - \eta_t\theta_t), & B_6 &= 2P(\zeta_x\theta_x + \zeta_y\theta_y - \zeta_t\theta_t), \\
C_1 &= P(\xi_{xx} + \xi_{yy} - \xi_{tt}) + 2(P_x\xi_x + 2P_y\xi_y - 2P_t\xi_t) + P\left(\frac{2\alpha}{x}\xi_x + \frac{2\beta}{y}\xi_y - \frac{2\gamma}{t}\xi_t\right), \\
C_2 &= P(\eta_{xx} + \eta_{yy} - \eta_{tt}) + 2(P_x\eta_x + P_y\eta_y - P_t\eta_t) + P\left(\frac{2\alpha}{x}\eta_x + \frac{2\beta}{y}\eta_y - \frac{2\gamma}{t}\eta_t\right), \\
C_3 &= P(\zeta_{xx} + \zeta_{yy} - \zeta_{tt}) + 2(P_x\zeta_x + 2P_y\zeta_y - 2P_t\zeta_t) + P\left(\frac{2\alpha}{x}\zeta_x + \frac{2\beta}{y}\zeta_y - \frac{2\gamma}{t}\zeta_t\right), \\
C_4 &= P(\theta_{xx} + \theta_{yy} - \theta_{tt}) + 2(P_x\theta_x + P_y\theta_y - P_t\theta_t) + P\left(\frac{2\alpha}{x}\theta_x + \frac{2\beta}{y}\theta_y - \frac{2\gamma}{t}\theta_t\right), \\
D &= P_{xx} + P_{yy} - P_{tt} + \frac{2\alpha}{x}P_x + \frac{2\beta}{y}P_y - \frac{2\gamma}{t}P_t + \lambda P.
\end{aligned}$$

Now we consider A_1 . Since

$$\begin{aligned}
\xi_x^2 &= \frac{\xi^2}{x^2} - \frac{4\xi^2(x-x_0)}{xr^2} + \frac{4\xi^2(x-x_0)^2}{(r^2)^2}, \\
\xi_y^2 &= \frac{4\xi^2(y-y_0)^2}{(r^2)^2}, & \xi_t^2 &= \frac{4\xi^2(t-t_0)^2}{(r^2)^2},
\end{aligned}$$

we obtain

$$A_1 = P\left(\frac{\xi^2}{x^2} - \frac{4\xi^2(x-x_0)}{xr^2} + \frac{4\xi^2(x-x_0)^2}{(r^2)^2} + \frac{4\xi^2(y-y_0)^2}{(r^2)^2} - \frac{4\xi^2(t-t_0)^2}{(r^2)^2}\right)$$

or

$$A_1 = -\frac{4Px_0}{xr^2}\xi(1-\xi). \tag{22}$$

Similarly we have

$$A_2 = -\frac{4Py_0}{yr^2}\eta(1-\eta), \tag{23}$$

$$A_3 = -\frac{4Py_0}{yr^2}\eta(1-\eta), \tag{24}$$

$$A_4 = \frac{P\lambda^2}{4}r^2 = \frac{4P\theta^2}{r^2}. \quad (25)$$

Further, we calculate representation of B_1 . Finding necessary derivatives from the arguments and substituting them into an expression of B_1 , we obtain

$$\begin{aligned} B_1 &= 2P \left[\left(\frac{\xi}{x} - \frac{2\xi(x-x_0)}{r^2} \right) \frac{8yy_0(x-x_0)}{(r^2)^2} + \right. \\ &\left. \left(-\frac{2\xi(y-y_0)}{r^2} \right) \left(\frac{\eta}{y} - \frac{2\eta(y-y_0)}{r^2} \right) - \frac{2\xi(t-t_0)}{r^2} \frac{2\eta(t-t_0)}{r^2} \right] = \\ &= 4P\xi\eta \left(\frac{y_0}{y} + \frac{x_0}{x} \right) \frac{1}{r^2} = \frac{4Py_0}{yr^2} + \frac{4Px_0}{xr^2}. \end{aligned}$$

After some evaluations, we deduce

$$B_1 = \left(\frac{4Py_0}{yr^2} + \frac{4Px_0}{xr^2} \right) \xi\eta. \quad (26)$$

Similarly, one obtains

$$B_2 = \left(\frac{4Pt_0}{tr^2} + \frac{4Px_0}{xr^2} \right) \xi\zeta, \quad (27)$$

$$B_3 = - \left(\frac{4P}{r^2} + \frac{4Px_0}{xr^2} \right) \xi\theta, \quad (28)$$

$$B_4 = \left(\frac{4Pt_0}{tr^2} + \frac{4Py_0}{yr^2} \right) \eta\zeta, \quad (29)$$

$$B_5 = - \left(\frac{4P}{r^2} + \frac{4Py_0}{yr^2} \right) \eta\theta, \quad (30)$$

$$B_6 = - \left(\frac{4P}{r^2} + \frac{4Pt_0}{tr^2} \right) \zeta\theta. \quad (31)$$

Further, considering the following expressions

$$\begin{aligned} C_1 &= P \left[-\frac{4\xi(x-x_0)}{xr^2} + \frac{8\xi(x-x_0)^2}{(r^2)^2} + \frac{8\xi(y-y_0)^2}{(r^2)^2} - \frac{8\xi(t-t_0)^2}{(r^2)^2} - \frac{6\xi}{r^2} \right] + \\ &- \frac{2\delta P}{r^2} \left[(x-x_0) \left(\frac{\xi}{x} - \frac{2\xi(x-x_0)}{r^2} \right) - \frac{2\xi(y-y_0)^2}{r^2} + \frac{2\xi(t-t_0)^2}{r^2} \right] + \\ &+ P \left[\frac{2\alpha}{x} \left(\frac{\xi}{x} - \frac{2\xi(x-x_0)}{r^2} \right) + \frac{2\beta}{y} \left(-\frac{2\xi(y-y_0)}{r^2} \right) - \frac{2\gamma}{t} \frac{2\xi(t-t_0)}{r^2} \right] = \\ &= P \left[-\frac{4\xi(x-x_0)}{xr^2} - \frac{6\xi}{r^2} + \frac{8\xi}{r^2} \left(\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - (t-t_0)^2}{r^2} \right) \right] + \\ &+ \frac{4P\delta}{r^2} \left[-\frac{\xi(x-x_0)}{r^2} + 2\xi \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - (t-t_0)^2}{r^2} \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4P}{r^2} \left[\frac{\alpha x_0}{x} + \alpha \xi + \frac{\alpha x_0}{x} (1 - \xi) - \frac{\beta y_0}{y} + \beta \xi + \frac{\beta y_0}{y} (1 - \xi) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\gamma t_0}{t} + \gamma \xi + \frac{\gamma t_0}{t} (1 - \xi) \right] = \\
& -\frac{4P}{r^2} \left[\frac{\alpha x_0}{x} + \alpha \xi + \frac{\alpha x_0}{x} (1 - \xi) - \frac{\beta y_0}{y} + \beta \xi + \frac{\beta y_0}{y} (1 - \xi) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\gamma t_0}{t} + \gamma \xi + \frac{\gamma t_0}{t} (1 - \xi) \right],
\end{aligned}$$

we get

$$C_1 = -\frac{4Px_0}{xr^2} [2\alpha - (1 + \alpha + \delta) \xi] + 4P \left(\frac{y_0}{yr^2} \beta \xi + \frac{t_0}{tr^2} \gamma \xi \right). \quad (32)$$

Similarly, we define

$$C_2 = -\frac{4Py_0}{yr^2} [2\beta - (1 + \beta + \delta) \eta] + 4P \left(\frac{x_0}{xr^2} \alpha \eta + \frac{t_0}{tr^2} \gamma \eta \right), \quad (33)$$

$$C_3 = -\frac{4Pt_0}{tr^2} [2\gamma - (1 + \gamma + \delta) \zeta] + 4P \left(\frac{x_0}{xr^2} \alpha \zeta + \frac{y_0}{yr^2} \beta \zeta \right), \quad (34)$$

$$C_4 = \frac{4P\theta}{r^2} \left[-\delta + 1 - \frac{\alpha x_0}{x} - \beta \frac{y_0}{y} - \frac{\gamma t_0}{t} \right]. \quad (35)$$

After simple calculations, we have

$$D = \frac{4Px_0}{xr^2} \delta \alpha + \frac{4Py_0}{yr^2} \delta \beta + \frac{4Pt_0}{tr^2} \delta \gamma + \frac{4P\theta}{r^2}. \quad (36)$$

Substituting (22) – (36) into (21), we obtain the following equation

$$\begin{aligned}
& -\frac{4Px_0}{xr^2} \xi (1 - \xi) \omega_{\xi\xi} - \frac{4Py_0}{yr^2} \eta (1 - \eta) \omega_{\eta\eta} - \frac{4Pt_0}{tr^2} \zeta (1 - \zeta) \omega_{\zeta\zeta} + \frac{4P\theta^2}{r^2} \omega_{\theta\theta} \\
& + \left(\frac{4Py_0}{yr^2} \xi \eta + \frac{4Px_0}{xr^2} \xi \eta \right) \omega_{\xi\eta} + \left(\frac{4Pt_0}{tr^2} \xi \zeta + \frac{4Px_0}{xr^2} \xi \zeta \right) \omega_{\xi\zeta} + \\
& + \left(-\frac{4P}{r^2} \xi \theta - 4P \frac{x_0}{xr^2} \xi \theta \right) \omega_{\xi\theta} + \left(\frac{4Pt_0}{tr^2} \eta \zeta + \frac{4Py_0}{yr^2} \eta \zeta \right) \omega_{\eta\zeta} + \\
& + \left(-\frac{4P}{r^2} \eta \theta - \frac{4Py_0}{yr^2} \eta \theta \right) \omega_{\eta\theta} + \left(-\frac{4P}{r^2} \zeta \theta - \frac{4Pt_0}{tr^2} \zeta \theta \right) \omega_{\zeta\theta} + \\
& + \left\{ -\frac{4Px_0}{xr^2} [2\alpha - (1 + \alpha + \delta) \xi] + \frac{4Py_0}{yr^2} \beta \xi + \frac{4Pt_0}{tr^2} \gamma \xi \right\} \omega_{\xi} + \\
& + \left\{ -\frac{4Py_0}{yr^2} [2\beta - (1 + \beta + \delta) \eta] + \frac{4Px_0}{xr^2} \alpha \eta + \frac{4Pt_0}{tr^2} \gamma \eta \right\} \omega_{\eta} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ -\frac{4Pt_0}{tr^2} [2\gamma - (1 + \gamma + \delta) \zeta] + \frac{4Px_0}{xr^2} \alpha \zeta + \frac{4Py_0}{yr^2} \beta \zeta \right\} \omega_\zeta + \\
& \quad + \left\{ \frac{4P\theta}{r^2} \left[-\delta + 1 - \alpha \frac{x_0}{x} - \beta \frac{y_0}{y} - \gamma \frac{t_0}{t} \right] \right\} \omega_\theta + \\
& \quad + \left\{ \frac{4Px_0}{xr^2} \delta \alpha + \frac{4Py_0}{yr^2} \delta \beta + \frac{4Pt_0}{tr^2} \delta \gamma + \frac{4P\theta}{r^2} \right\} \omega = 0
\end{aligned}$$

which is equivalent to the following system of the partial differential equations

$$\left\{ \begin{array}{l}
\xi(1-\xi)\omega_{\xi\xi} - \xi\eta\omega_{\xi\eta} - \xi\zeta\omega_{\xi\zeta} + \xi\theta\omega_{\xi\theta} - \alpha\eta\omega_\eta \\
\quad - \gamma\zeta\omega_\zeta + \alpha\theta\omega_\theta + [2\alpha - (1 + \alpha + \delta)\xi]\omega_\xi - \delta\alpha\omega = 0, \\
\eta(1-\eta)\omega_{\eta\eta} - \xi\eta\omega_{\xi\eta} - \eta\zeta\omega_{\eta\zeta} + \eta\theta\omega_{\eta\theta} - \beta\xi\omega_\xi \\
\quad - \beta\zeta\omega_\zeta + \beta\theta\omega_\theta + [2\beta - (1 + \beta + \delta)\eta]\omega_\eta - \delta\beta\omega = 0, \\
\zeta(1-\zeta)\omega_{\zeta\zeta} - \xi\zeta\omega_{\xi\zeta} - \eta\zeta\omega_{\eta\zeta} + \zeta\theta\omega_{\zeta\theta} - \gamma\xi\omega_\xi \\
\quad - \gamma\eta\omega_\eta + \gamma\theta\omega_\theta + [2\gamma - (1 + \gamma + \delta)\zeta]\omega_\zeta - \delta\gamma\omega = 0, \\
\theta\omega_{\theta\theta} - \xi\omega_{\xi\theta} - \eta\omega_{\eta\theta} - \zeta\omega_{\zeta\theta} - \delta\omega_\theta + \omega = 0.
\end{array} \right. \quad (37)$$

Thus, the singular ultra hyperbolic equation with parameter (1) equivalently reduced to the system (37).

PARTICULAR SOLUTIONS OF THE SINGULAR ULTRA HYPERBOLIC EQUATION WITH THE PARAMETER

Comparing now the system (37) with the system (10) and taking into account an expressions (11) – (18) of the solutions of the system (10), by virtue of (20), we get the following 8 particular solutions of the singular ultra hyperbolic equation with parameter (1):

$$q_1(x, y, t, x_0, y_0, t_0) = k_1 r^{-2\delta} H_A^{(3,1)}(\delta; \alpha, \beta, \gamma; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma; \xi, \eta, \zeta, \theta), \quad (38)$$

$$\begin{aligned}
q_2(x, y, t, x_0, y_0, t_0) &= k_2 r^{4\alpha-2-2\delta} (xx_0)^{1-2\alpha} \times \\
&\quad \times H_A^{(3,1)}(1 + \delta - 2\alpha; 1 - \alpha, \beta, \gamma; 2 - 2\alpha, 2\beta, 2\gamma; \xi, \eta, \zeta, \theta), \quad (39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_3(x, y, t, x_0, y_0, t_0) &= k_3 r^{4\beta-2-2\delta} (yy_0)^{1-2\beta} \times \\
&\quad \times H_A^{(3,1)}(1 + \delta - 2\beta; \alpha, 1 - \beta, \gamma; 2\alpha, 2 - 2\beta, 2\gamma; \xi, \eta, \zeta, \theta), \quad (40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_4(x, y, t, x_0, y_0, t_0) &= k_4 r^{4\gamma-2-2\delta} (tt_0)^{1-2\gamma} \times \\
&\quad \times H_A^{(3,1)}(1 + \delta - 2\gamma; \alpha, \beta, 1 - \gamma; 2\alpha, 2\beta, 2 - 2\gamma; \xi, \eta, \zeta, \theta), \quad (41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_5(x, y, t, x_0, y_0, t_0) &= k_5 r^{2\alpha+2\beta-\delta-2} (xx_0)^{1-2\alpha} (yy_0)^{1-2\beta} \times \\
&\quad \times H_A^{(3,1)}(2 + \delta - 2\alpha - 2\beta; 1 - \alpha, 1 - \beta, \gamma; 2 - 2\alpha, 2 - 2\beta, 2\gamma; \xi, \eta, \zeta, \theta) \quad (42)
\end{aligned}$$

$$q_6(x, y, t, x_0, y_0, t_0) = k_6 r^{2\alpha+2\gamma-\delta-2} (xx_0)^{1-2\alpha} (tt_0)^{1-2\gamma} \times \\ \times H_A^{(3,1)}(2 + \delta - 2\alpha - 2\gamma; 1 - \alpha, \beta, 1 - \gamma; 2 - 2\alpha, 2\beta, 2 - 2\gamma; \xi, \eta, \zeta, \theta), \quad (43)$$

$$q_7(x, y, t, x_0, y_0, t_0) = k_7 r^{2\beta+2\gamma-\delta-2} (yy_0)^{1-2\beta} (tt_0)^{1-2\gamma} \times \\ \times H_A^{(3,1)}(2 + \delta - 2\beta - 2\gamma; \alpha, 1 - \beta, 1 - \gamma; 2\alpha, 2 - 2\beta, 2 - 2\gamma; \xi, \eta, \zeta, \theta), \quad (44)$$

$$q_8(x, y, t, x_0, y_0, t_0) = k_8 r^{2\delta-8} (xx_0)^{1-2\alpha} (yy_0)^{1-2\beta} (tt_0)^{1-2\gamma} \times \\ \times H_A^{(3,1)}(4 - \delta; 1 - \alpha, 1 - \beta, 1 - \gamma; 2 - 2\alpha, 2 - 2\beta, 2 - 2\gamma; \xi, \eta, \zeta, \theta), \quad (45)$$

where k_1, \dots, k_8 are constants and

$$\xi = -\frac{4xx_0}{r^2}, \quad \eta = -\frac{4yy_0}{r^2}, \quad \zeta = \frac{4tt_0}{r^2}, \quad \theta = \frac{1}{4}\lambda r^2, \\ r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (t - t_0)^2.$$

Note, the multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients (2) has 8 fundamental solutions in the forms (38) – (45) with other variables that differ from the variables in (38) – (45) in signs (see, [2]):

$$\tilde{\xi} = -\frac{4xx_0}{r^2}, \quad \tilde{\eta} = -\frac{4yy_0}{r^2}, \quad \tilde{\zeta} = -\frac{4tt_0}{r^2}, \quad \tilde{\theta} = \frac{1}{4}\lambda r^2$$

and

$$\tilde{r}^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (t - t_0)^2.$$

Conclusion.

In conclusion, we note that partial solutions satisfying the singular ultra hyperbolic and elliptic equations (1) and (2) (respectively, the equations (3) and (4)) are always written through the same confluent function, the variables of which differ from each other only with signs depending on the equation under consideration.

This circumstance must be taken into account when constructing partial solutions of the more general singular ultra hyperbolic equation

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{2\alpha_i}{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} + \frac{2\beta_j}{y_j} \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) + \lambda u = 0,$$

using the fundamental solutions of the generalized singular elliptic Helmholtz equation expressed in terms of the confluent hypergeometric function in $m + n + 1$ variables (see, [23]).

REFERENCES

1. Srivastava H. M., Kashyap B .R. K. Special Functions in Queuing Theory and Related Stochastic Processes, New York, London, San Francisco, Academic Prees, 1982.

2. Niukkanen A. W. Generalised hypergeometric series ${}^N F(x_1, \dots, x_N)$ arising in physical and quantum chemical applications, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **16**, pp. 1813–1825, 1983.
3. Frankl F. I. Selected Works on the Gas Dynamics, Nauka, Moscow, 1973 [in Russian].
4. Bezrodnykh S. I. The Lauricella hypergeometric function $F_D^{(N)}$, the Riemann-Hilbert problem, and some applications, *Russian Math. Surveys*, **73**(6), pp. 941 – 1031, 2018.
5. Hasanov A., Ruzhansky M. Euler-type integral representations for the hypergeometric functions in three variables of second order, *Bulletin of the Institute of Mathematics*, **2**(6), pp. 73 – 223, 2019.
6. Ergashev T. G. Generalized Holmgren Problem for an Elliptic Equation with Several Singular Coefficients *Differential Equations*, Vol. 56, No. 7, pp. 842 – 856, 2020.
7. Ruzhansky M., Hasanov A. Self-similar solutions of some model degenerate partial differential equations of the second, third and fourth order, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **41**(6), pp. 1103 – 1114, 2020.
8. Ergashev T. G., Tulakova Z. R. The Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Several Singular Coefficients in an Infinite Domain, *Russian Mathematics*, 2021, Vol. 65, No. 7, pp. 71–80.
9. Ergashev T. G., Komilova N. J. Generalized Solution of the Cauchy Problem for Hyperbolic Equation with Two Lines of Degeneracy of the Second Kind, *Lobachevskii J. Math.* **42**(15), pp. 3616–3625, 2021.
10. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions, Vol. I. McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1953. 302 p.
11. Horn L. Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen, *Math. Ann.* 1931, 105. pp.381–407.
12. Srivastava H. M., Karlsson P. W. Multiple Gaussian Hypergeometric Series. New York, Chichester, Brisbane and Toronto: Halsted Press, 1985. 428 p.
13. Jain R. N. The confluent hypergeometric functions of three variables, *Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. (A)* **36**, pp. 395–408 1966.
14. Exton H. On certain confluent hypergeometric of three variables, *Ganita.* **21** (2), pp. 79–92 1970.
15. Ergashev T. G., Vokhobov F. F., Makhmudov B. B. The confluent hypergeometric functions of three variables. *Bull. Inst. Math.*, Vol. 5, No. 6, pp. 149 – 177, 2022.
16. Ergashev T. G. On fundamental solutions for multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients. *Computers and Mathematics with Applications*, V. 77. Issue 1. pp. 69 – 76, 2019.

17. Seilkhanova R. B., Hasanov A. Particular solutions of generalized Euler-Poisson-Darboux equation. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. No. 9, pp. 1–10, 2015.
18. Hasanov A. The solution of the Cauchy problem for generalized Euler-Poisson-Darboux equation. *International Journal of Applied mathematics and Statistics*, Vol.8, No M07, pp. 30 – 43, 2007.
19. Hasanov A. Fundamental solutions bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*. V. 52, No. 8. pp. 673 – 683, 2007.
20. Lauricella G. Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **7**, pp. 111–158 1893.
21. Erdélyi A. Integraldarstellungen fur Produkte Whittakerscher Funktionen, *Nieuw Arch. Wisk.* **20** (2), pp. 1–34 1939.
22. Appell P. and Kampé de Fériet J. *Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d’Hermite*, Gauthier - Villars, Paris 1926.
23. Ergashev T. G. Fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with several singular coefficients and confluent hypergeometric functions of many variables. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. V. 41, No.1. pp. 15 - 26, 2020.

PARAMETRLI UCH O’LCHOVLI SIGULYAR ULTRA GIPERBOLIK TEHGLAMANING XUSUSIY ECHIMLARI

REZYUME

Ushbu ishning asosiy natijasi to’rtta o’zgaruvchida qo’shilgan gipergeometrik funktsiyada ifodalanishi mumkin bo’lgan yagona koeffitsientlar va spektral parametrlarga ega bo’lgan ikkinchi darajali ultra giperbolik tenglamaning maxsus yechimlarini qurishdir.

Kalit so‘zlar: singulyar ultra giperbolik tenglama, parametrli giperbolik tenglama, xususiy yechimlar, bir nechta qo’shilgan gipergeometrik funktsiyalar.

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО СИНГУЛЯРНОГО УЛЬТРА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

РЕЗЮМЕ

Основным результатом настоящей работы является построение частных решений ультрагиперболического уравнения второго порядка с сингулярными коэффициентами и спектральным параметром, которые выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию от четырех переменных.

Ключевые слова: сингулярное ультрагиперболическое уравнение, гиперболическое уравнение с параметром, частные решения, кратно вырожденные гипергеометрические функции.

UDC 517.95

**IKKI KARRALI FURYE QATORINING UCHBURCHAKLI QISMIY
YIG'INDILARI UCHUN LEBEG O'ZGARMASINI ASIMPTOTIK HOLATI
HAQIDA**

Atabayeva D. J., * Buvayev Q. T. *

REZYUME

Odatda, ko'pincha karrali Furye qatorining koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lgan sohalar bo'yicha qisman yig'indilari uchun Lebeg o'zgarmasining asimptotik holatlari o'rganilgan. Mazkur maqolada esa bu yo'nalishdagi tadqiqotlarni simmetrik bo'lmagan soha uchun ham o'rganish mumkinligi ko'rsatilgan hamda oldingi ishlarda olingan noma'lum o'zgarmalar qaralayotgan hol uchun aniqlashtirib berilgan.

Kalit so'zlar: Furye qatori, Dirixle yadrosi, Lebeg o'zgarmasi, asimptotik baho.

R^2 - ikki o'lchovli haqiqiy yevklid fazosi, $Z^2 - R^2$ dagi ikki o'lchovli butun sonli panjara hamda $T^2 = \{(x, y) \in R^2 : -\pi < x \leq \pi, -\pi < y \leq \pi\}$ - ikki o'lchovli tor bo'lsin. Ihtiyoriy $k = 0, 1, 2, \dots$ sonlari uchun, quyidagi $\Omega_k = \{(x, y) \in R^2 : x + y \leq k, x \geq 0, y \geq 0\}$ uchburchakli sohani qaraylik. Δ_k orqali ushbu $\Delta_k = \Omega_k \cap Z^2$ tenglik bilan aniqlangan to'plamni belgilaymiz. Tekislikdagi sohada yotuvchi barcha butun koordinatali nuqtalar bo'yicha olingan ushbu

$$D_k(x, y) = \sum_{(n, m) \in \Delta_k} e^{i(nx + my)}, \quad (1)$$

ko'rinishdagi yig'indini tuzamiz, odatda (1) yig'indiga Dirixle yadrosi deb atashadi.

Dirixle yadrosi $D_k(x, y)$ orqali ifodalangan, quyidagi

$$\int_{T^2} |D_k(x, y)| dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_k(x, y)| dx dy, \quad (2)$$

ko'rinishidagi integralga Lebeg o'zgarmasi deyiladi va uni biz L_k orqali belgilaymiz. Shunday qilib, Lebeg o'zgarmasi deb quyidagi

$$L_k = \int_{T^2} |D_k(x, y)| dx dy, \quad (3)$$

tenglik bilan aniqlangan integralga aytilar ekan.

$\Pi - n$ o'lchovli R^n yevklid fazosidagi ihtiyoriy yopiq ko'pburchak, $R\Pi = \{x \in R^n : \frac{x}{R} \in \Pi\}$ - Π ni $R > 0$ koeffitsientli gomoteti, $\Pi_R = R\Pi \cap Z^n$ bo'lsin, bu holda ham (3) tenglikka o'xshash Lebeg o'zgarmasi quyidagi

*Atabaeva D. J. - O'zbekiston Milliy universiteti, bek488@gmail.com

*Buvayev Q. T. - O'zbekiston Milliy universiteti, buvayev@mail.ru

$$L_R(\Pi) = \int_{T^n} \left| \sum_{m \in \Pi_R} e^{imx} \right| dx, \quad (4)$$

tenglik bilan aniqlanadi. (4) tenglik bilan aniqlangan Lebeg o'zgarmaslarining $R \rightarrow \infty$ dagi asimptotik holatlarini o'rganish masalasi S.B. Stechkin tomonidan qo'yilgan. V.A. Yudin [1, 2] ishlarida, qavariq sohalar ichida shar Lebeg o'zgarmasi $R^{(n-1)/2}$ bo'lgan eng katta o'sishni vujudga keltirsa, kub esa Lebeg o'zgarmasi $\ln^n R$ bo'lgan eng kichik o'sishni vujudga keltirishini isbotladi, ya'ni ixtiyoriy yopiq qavariq sohalar uchun R ga bog'liq bo'lmagan $\exists M_1$ va $\exists M_2$ sonlari mavjudki ushbu

$$M_1 \ln^n R \leq L_R \leq M_2 R^{(n-1)/2}, \quad (5)$$

qo'sh tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Qavariq ko'pburchaklar uchun [3-5] ishlarda R ga bog'liq bo'lmagan ixtiyoriy $M > 0$ soni uchun, quyidagi

$$L_R \leq M \ln^n R, \quad (6)$$

tengsizlik o'rinli ekanligi isbotlangan.

(5) va (6) tengsizliklardan quyidagi natija kelib chiqadi: ixtiyoriy qavariq ko'pburchaklar uchun R ga bog'liq bo'lmagan $\exists M_1$ va $\exists M_2$ sonlari mavjudki ushbu

$$M_1 \ln^n R \leq L_R \leq M_2 \ln^n R, \quad (7)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Mazkur ishda, uchburchakli sohada Dirixle yadrosi $D_k(x, y)$ uchun muhim tenglik olingan va bu tenglik yordamida Lebeg o'zgarmasi L_k ni $k \rightarrow \infty$ dagi asimptotik holati o'rganilgan, ya'ni quyidagi natija olingan.

Teorema. *Ushbu*

$$L_k = \frac{16}{\pi^4} \ln^2 k + O(\ln k) \quad (8)$$

asimptotik tenglik $k \rightarrow \infty$ da tekis bajariladi.

Mazkur teoremani yuqorida keltirilgan teoremalardan farqi hamda muxim tomoni shundan iboratki, bu yerda $\ln^2 k$ oldidagi koeffitsient aniq xisoblangan. Bu esa tatbiqiy masalalarni xisoblash matematikasi usullari bilan yechishda qo'l keladi.

Teoremani isboti quyidagi lemmaga asoslanadi.

Lemma. $\forall k = 0, 1, \dots$ va ushbu $x^2 + y^2 \neq 0$ munosabatni qanoatlantiruvchi $\forall (x, y) \in \Omega_k$ lar uchun quyidagi

$$D_k(x, y) = \frac{1}{4 \sin \frac{y}{2}} \times \left\{ \frac{\sin \left(\frac{k}{2} + 1 \right) (x - y) \cos \frac{k}{2} (x + y) - \cos \frac{k+1}{2} (x + y) \sin \frac{k+1}{2} (x - y) - \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{x-y}{2}} + \right. \\ \left. + i \frac{\sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} + \sin \left(\frac{k}{2} + 1 \right) (x - y) \sin \frac{k}{2} (x + y) - \sin \frac{k+1}{2} (x + y) \sin \frac{k+1}{2} (x - y)}{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{x-y}{2}} \right\} \quad (9)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. (1) ni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$D_k(x, y) = \sum_{(n,m) \in \Delta_k} e^{i(nx+my)} = \sum_{n=0}^k e^{inx} \sum_{m \leq k-n} e^{imy}. \quad (10)$$

Dastlab ichki yig'indini xisoblaymiz:

$$\sum_{m \leq k-n} e^{imy} = \sum_{m=0}^{k-n} (\cos my + i \sin my) = \sum_{m=0}^{k-n} \cos my + i \sum_{m=0}^{k-n} \sin my = A_1 + iA_2, \quad (11)$$

bu yerda A_1 va A_2 lar orqali mos ravishda birinchi va ikkinchi yig'indilar belgilangan. A_1 yig'indini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{m=0}^{k-n} \cos my = \frac{1}{\sin \frac{y}{2}} \sum_{m=0}^{k-n} \cos my \sin \frac{y}{2} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{y}{2}} \sum_{m=0}^{k-n} \left[\sin \left(m + \frac{1}{2} \right) y - \sin \left(m - \frac{1}{2} \right) y \right] = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{y}{2}} \left[\left(\sin \frac{y}{2} - \sin \left(-\frac{y}{2} \right) \right) + \left(\sin \frac{3y}{2} - \sin \frac{y}{2} \right) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sin \left(k - n + \frac{1}{2} \right) y - \sin \left(k - n - \frac{1}{2} \right) y \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{y}{2}} \left(\sin \left(k - n + \frac{1}{2} \right) y + \sin \frac{y}{2} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Xuddi shunga o'xshash hisoblashlar orqali A_2 yig'indi uchun quyidagi tenglikni xosil qilamiz:

$$A_2 = \frac{1}{2 \sin \frac{y}{2}} \left(\cos \frac{y}{2} - \cos \left(k - n + \frac{1}{2} \right) y \right). \quad (13)$$

(12) va (13) larni (11) ga qo'yib, ushbu

$$\sum_{m \leq k-n} e^{imy} = \frac{1}{2 \sin \frac{y}{2}} \left[\left(\sin \left(k - n + \frac{1}{2} \right) y + \sin \frac{y}{2} \right) + i \left(\cos \frac{y}{2} - \cos \left(k - n + \frac{1}{2} \right) y \right) \right], \quad (14)$$

tenglikni xosil qilamiz. O'z navbatida (14) ni (8) ga qo'yib, hamda ba'zi bir almashtirishlardan so'ng, quyidagini xosil qilamiz:

$$D_k(x, y) = \frac{1}{2 \sin \frac{y}{2}} [B_1 + B_2 + iB_3 - iB_4], \quad (15)$$

bu yerda B_1 , B_2 , B_3 va B_4 lar quyidagi tengliklar bilan aniqlanadi:

$$B_1 = \sum_{n=0}^k \sin \left[\left(k - n + \frac{1}{2} \right) y + nx \right], \quad (16)$$

$$B_2 = \sum_{n=0}^k \sin \left(\frac{y}{2} - nx \right), \quad (17)$$

$$B_3 = \sum_{n=0}^k \cos \left(\frac{y}{2} - nx \right), \quad (18)$$

$$B_4 = \sum_{n=0}^k \cos \left[\left(k - n + \frac{1}{2} \right) y + nx \right], \quad (19)$$

Endi B_1 , B_2 , B_3 va B_4 yig'indilarni xisoblaymiz.

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum_{n=0}^k \sin \left[\left(k - n + \frac{1}{2} \right) y + nx \right] = \sum_{n=0}^k \sin \left[(x - y)n + \left(k + \frac{1}{2} \right) y \right] = \\ &= \left[a = x - y, \quad b = \left(k + \frac{1}{2} \right) y \right] = \\ &= \sum_0^k (an + b) = \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} \sum_{n=0}^k \sin(an + b) \sin \frac{a}{2} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{a}{2}} \sum_{n=0}^k \left\{ \cos \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) a + b \right] - \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) a + b \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{a}{2}} \left\{ \cos \left(-\frac{a}{2} + b \right) - \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) a + b \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{a}{2}} \left\{ \cos \left(\frac{a}{2} - b \right) - \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) a + b \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x-y}{2}} \left\{ \cos \left[\frac{x-y}{2} - \left(k + \frac{1}{2} \right) y \right] - \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) (x-y) + \left(k + \frac{1}{2} \right) y \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x-y}{2}} \left\{ \cos \left[\frac{x}{2} - (k+1)y \right] - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) x \right\}. \end{aligned}$$

Shunday qilib, B_1 uchun quyidagi tenglikni xosil qilamiz:

$$B_1 = \frac{1}{2 \sin \frac{x-y}{2}} \left\{ \cos \left[\frac{x}{2} - (k+1)y \right] - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) x \right\}. \quad (20)$$

Xuddi shunga o'xshash B_2 , B_3 va B_4 larni xisoblab, ular uchun quyidagi tengliklarni xosil qilamiz:

$$B_2 = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left\{ \cos \left[\frac{y}{2} - \left(k + \frac{1}{2} \right) x \right] - \cos \frac{x+y}{2} \right\}, \quad (21)$$

$$B_3 = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left\{ \sin \frac{x+y}{2} - \sin \left[\frac{y}{2} - \left(k + \frac{1}{2} \right) x \right] \right\}, \quad (22)$$

$$B_4 = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left\{ \sin \left[\frac{x}{2} - (k+1)y \right] + \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) x \right\}. \quad (23)$$

(15) ga (20), (21), (22) va (23) larni qo‘yib, (9)ni hosil qilamiz. Lemma isbotlandi.

Teorema isboti. Dastlab Dirixle yadrosini quyidagi ko‘rinishida yozib olamiz:

$$\begin{aligned} D_k(x, y) &= \frac{1}{4 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} \times \\ &\times \left\{ \sin \left(\frac{k}{2} + 1 \right) (x-y) \cos \frac{k}{2}(x+y) - \cos \frac{k+1}{2}(x+y) \sin \frac{k+1}{2}(x-y) - \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} + i \left[\sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \left(\frac{k}{2} + 1 \right) (x-y) \sin \frac{k}{2}(x+y) - \sin \frac{k+1}{2}(x+y) \sin \frac{k+1}{2}(x-y) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{4 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} \times \{R + iS\} \end{aligned} \quad (24)$$

Bu yerda $R = R_k(x, y)$ va $S = S_k(x, y)$ orqali mos ravishda sistemali qavs ichidagi haqiqiy va mavhum qismlar belgilangan. Teoremani isbotlash (24) tenglikni $L_1(T^2)$ dagi bahosini topishdan iborat. Vaholanki, bizga R ni baholashni o‘zi yetarli, S esa xuddi shunga o‘xshash baholanadi. Buning uchun R ni quyidagi ko‘rinishida yozib olamiz:

$$\begin{aligned} R &= \sin \frac{k}{2}(x-y) \cos(x-y) \cos \frac{k}{2}(x+y) + \cos \frac{k}{2}(x-y) \sin(x-y) \cos \frac{k}{2}(x+y) - \\ &\quad - \cos \frac{k}{2}(x+y) \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{k}{2}(x-y) \cos \frac{x-y}{2} + \\ &\quad + \sin \frac{k}{2}(x+y) \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{k}{2}(x-y) \cos \frac{x-y}{2} - \\ &\quad - \cos \frac{k}{2}(x+y) \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{k}{2}(x-y) \sin \frac{x-y}{2} + \\ &\quad + \sin \frac{k}{2}(x+y) \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{k}{2}(x-y) \sin \frac{x-y}{2} - \\ &\quad - \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Oxirgi tenglikda quyidagicha almashtirishlar qilamiz:

$$\begin{aligned} R &= \sin \frac{k}{2}(x-y) \cos \frac{k}{2}(x+y) \left[\cos(x-y) - \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] + \\ &\quad + \cos \frac{k}{2}(x-y) \cos \frac{k}{2}(x+y) \left[\sin(x-y) - \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] + \\ &\quad + \sin \frac{k}{2}(x+y) \sin \frac{x+y}{2} \left[\sin \frac{k}{2}(x-y) \cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{k}{2}(x-y) \sin \frac{x-y}{2} \right] - \end{aligned}$$

$$-\cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}. \quad (26)$$

Birinchi to'rtburchakli qavs ichida quyidagi o'zgarishlar qilamiz:

$$\begin{aligned} \cos(x-y) - \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} &= \cos^2 \frac{x-y}{2} - \sin^2 \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \\ &= \cos \frac{x-y}{2} \left[\cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \right] - \sin^2 \frac{x-y}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{x-y}{2} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} - \sin^2 \frac{x-y}{2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Endi (26) tenglikdagi ikkinchi to'rtburchakli qavs ichida quyidagi almashtirishlar qilamiz:

$$\begin{aligned} \sin(x-y) - \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} = \\ &= \sin \frac{x-y}{2} \left(2 \cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \right) = \\ &= \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

(27) va (28) ni (26) ga qo'yib, hamda qavslarni ochib, quyidagini xosil qilamiz:

$$R = R_1 + R_2, \quad (29)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} R_1 = R_1^k(x, y) &= 2 \sin \frac{k}{2}(x-y) \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \cos \frac{k}{2}(x+y) \cos \frac{x-y}{2} + \\ &+ 2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{k}{2}(x-y) \cos \frac{k}{2}(x+y), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} R_2 = R_2^k(x, y) &= -\sin \frac{k}{2}(x-y) \cos \frac{k}{2}(x+y) \sin^2 \frac{x-y}{2} + \\ &+ \cos \frac{k}{2}(x-y) \cos \frac{k}{2}(x+y) \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \\ &+ \sin \frac{k}{2}(x+y) \sin \frac{k}{2}(x-y) \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \\ &+ \sin \frac{k}{2}(x+y) \cos \frac{k}{2}(x-y) \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Ma'lumki, $k \rightarrow \infty$ da quyidagi

$$\int_0^\pi \left| \frac{\sin \frac{k}{2}t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt = \frac{2}{\pi} \ln k + O(1) \quad (32)$$

baho o'rinli (masalan [6] ishga qarang). (32) da o'zgaruvchilarni almashtirib, ushbu

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \left| \frac{\sin \frac{k}{2}(x \pm y)}{2 \sin \frac{x \pm y}{2}} \right| dx dy = O(\ln k) \quad (33)$$

asimptotik bahoni $k \rightarrow \infty$ tekis bajarilishini ko'rish mumkin.

Tushinarlikki, (30) va (33) tengliklarga ko'ra quyidagi

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{R_1^k(x, y)}{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} \right| dx dy = O(\ln k) \quad (34)$$

munosabatni $k \rightarrow \infty$ da osongina olish mumkin.

Haqiqatan ham:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{R_1^k(x, y)}{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} \right| dx dy = \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{2 \sin \frac{k}{2}(x-y) \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \cos \frac{k}{2}(x+y) \cos \frac{x-y}{2}}{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} + \right. \\ &+ \left. \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{k}{2}(x-y) \cos \frac{k}{2}(x+y)}{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} \right| dx dy \leq \\ &\leq 2 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin \frac{k}{2}(x-y)}{\sin \frac{x-y}{2}} \right| \left| \cos \frac{k}{2}(x-y) \right| \left| \cos \frac{k}{2}(x+y) \right| dx dy + \\ &+ 2 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left| \cos \frac{k}{2}(x-y) \right| \left| \cos \frac{k}{2}(x+y) \right| dx dy \leq \\ &\leq 4 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin \frac{k}{2}(x-y)}{2 \sin \frac{x-y}{2}} \right| dx dy + 2\pi^2 = \\ &= 4O(\ln k) + 2\pi^2 = O(\ln k). \end{aligned}$$

Endi R_2 da almashtirishlar qilamiz:

$$\begin{aligned} R_2 &= \sin \frac{x-y}{2} \left[\sin \frac{k}{2}(x+y) \cos \frac{k}{2}(x-y) \sin \frac{x+y}{2} - \right. \\ &- \left. \sin \frac{k}{2}(x-y) \cos \frac{k}{2}(x+y) \sin \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \right] + \\ &+ \cos \frac{x-y}{2} \left[\cos \frac{k}{2}(x-y) \cos \frac{k}{2}(x+y) \sin \frac{x-y}{2} + \right. \\ &+ \left. \sin \frac{k}{2}(x+y) \sin \frac{k}{2}(x-y) \sin \frac{x+y}{2} \right] = R_{21} + R_{22}, \end{aligned} \quad (35)$$

bu yerda

$$R_{21} = R_{21}^k(x, y) = \sin \frac{x-y}{2} \left[\sin \frac{k}{2}(x+y) \cos \frac{k}{2}(x-y) \sin \frac{x+y}{2} - \right.$$

$$-\sin \frac{k}{2}(x-y) \cos \frac{k}{2}(x+y) \sin \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \Big], \quad (36)$$

$$R_{22} = R_{22}^k(x, y) = \cos \frac{x-y}{2} \left[\cos \frac{k}{2}(x-y) \cos \frac{k}{2}(x+y) \sin \frac{x-y}{2} + \right. \\ \left. + \sin \frac{k}{2}(x+y) \sin \frac{k}{2}(x-y) \sin \frac{x+y}{2} \right]. \quad (37)$$

Endi R_{21} va R_{22} lar ustida almashtirishlar qilamiz, dastlab R_{21} ustida quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$$R_{21} = \sin \frac{x-y}{2} \left[\frac{1}{2}(\sin kx + \sin ky) \left(\sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} + \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}(\sin kx - \sin ky) \left(\sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} - \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right) - \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} - \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right) \right] = \\ = \sin \frac{x-y}{2} \left[\sin kx \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} + \sin ky \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} + \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right] - \\ - \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} = R_{21}^1 + R_{21}^2, \quad (38)$$

bu yerda

$$R_{21}^1 = R_{21}^1(k, x, y) = \sin \frac{x-y}{2} \left[\sin kx \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} + \sin ky \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} + \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right], \quad (39)$$

$$R_{21}^2 = R_{21}^2(k, x, y) = -\sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2}. \quad (40)$$

(32) va (39) larga ko'ra quyidagini xosil qilamiz:

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \left| \frac{R_{21}^1(k, x, y)}{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} \right| dx dy = O(\ln k). \quad (41)$$

Haqiqatan ham:

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \left| \frac{R_{21}^1(k, x, y)}{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} \right| dx dy = \\ = \int_0^\pi \int_0^\pi \left| \frac{\sin \frac{x-y}{2} \left[\sin kx \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} + \sin ky \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} + \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right]}{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} \right| dx dy \leq \\ \leq \int_0^\pi \int_0^\pi \left| \frac{\sin kx}{\sin \frac{x}{2}} \right| \left| \cos \frac{x}{2} \right| dx dy + \int_0^\pi \int_0^\pi \left| \frac{\sin ky}{\sin \frac{y}{2}} \right| \left| \cos \frac{y}{2} \right| dx dy + \int_0^\pi \int_0^\pi dx dy \leq \\ \leq 4 \int_0^\pi \int_0^\pi \left| \frac{\sin \frac{k}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| dx dy + 4 \int_0^\pi \int_0^\pi \left| \frac{\sin \frac{k}{2}y}{2 \sin \frac{y}{2}} \right| dx dy + \pi^2 \leq$$

$$\leq \frac{8}{\pi} \ln k + \frac{8}{\pi} \ln k + \pi^2 + O(1) = O(\ln k).$$

Endi R_{22} da almashtirish bajarib, ushbu

$$R_{22} = \cos \frac{x-y}{2} \left[\cos kx \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} - \cos kx \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right] \quad (42)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Dirihle yadrosining maxrajini hisobga olib, baholanmagan (40) va (42) tengliklarni yig'indisini \bar{R} orqali belgilaymiz, ya'ni:

$$\begin{aligned} \bar{R} = \bar{R}_k(x, y) = R_{21}^2 + R_{22} = \cos \frac{x-y}{2} \left[\cos kx \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} - \cos kx \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right] - \\ - \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2}. \end{aligned} \quad (43)$$

[7] ishda $k \rightarrow \infty$ da ushbu

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^\pi \left| \frac{\sin \frac{k}{2}(x+y) \sin \frac{k}{2}(x-y)}{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} \right| dx dy = \frac{4}{\pi^2} \ln^2 k + O(\ln k) \quad (44)$$

bahoni o'rinli ekanligi isbotlangan. (44) dan foydalanib, quyidagi

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \left| \frac{\bar{R}_k(x, y)}{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} \right| dx dy = \frac{8}{\pi^4} \ln^2 k + O(\ln k) \quad (45)$$

bahoni $k \rightarrow \infty$ da o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin. O'z navbatida, (34), (41) va (45) tengliklardan Dirixle yadrosining haqiqiy qismi uchun ushbu

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \left| \frac{R_k(x, y)}{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} \right| dx dy = \frac{8}{\pi^4} \ln^2 k + O(\ln k) \quad (46)$$

bahoni o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shu yo'l bilan Dirixle yadrosini mavhum qismi uchun (46) ga o'hshash bahoni olish mumkin. Bu baholardan teoremani to'g'ri ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

ADABIYOTLAR

1. Юдин В.А. Поведение констант Лебега. -Математические заметки, 1975, т.17, №3, с. 401-405.
2. Юдин В.А. Оценка снизу констант Лебега. -Математические заметки, 1979, т.25, №1, с. 119-122.
3. Белинский Э.С. Поведение констант Лебега некоторых методов суммирования кратных рядов Фурье, Сб., Метрические вопросы теории функций и отображений, вып. 8.-Киев: Наукова думка, 1977, с. 19-40.

4. Подкорытов А.Н. Порядок роста констант Лебега сумм Фурье по полиэдрам. - Вестник ЛГУ, 1982, №7, с. 110-111.
5. Байбородов С.П. Константы Лебега многогранников, -Математические заметки, 1982, т.32, №6, с. 817-822.
6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т.1, М.: Мир, 1965, 616 с.
7. Кузнецова О.И. Об асимптотическом поведении констант Лебега для последовательности треугольных частных сумм двойных рядов Фурье, Сибирский математический журнал, 1977, т. 18, №3, с. 629-636.

РЕЗЮМЕ

Обычно асимптотическое поведение константы Лебега изучались для частичных сумм кратных рядов Фурье по областям, которые симметричны относительно осей координат. В данной статье показано, что исследования в этом направлении могут быть изучены как для несимметричной области и для рассматриваемого случая уточняются неизвестные константы, полученные в предыдущих работах.

Ключевые слова: ряд Фурье, ядро Дирихле, константы Лебега, асимптотическая оценка.

RESUME

Usually, the asymptotic states of the Lebesgue variable for partial sums of multiple Fourier series over fields symmetric about the coordinate axes have been studied. In this article, it is shown that the researches in this direction can be studied for the non-symmetric field, and the unknown invariants obtained in previous works are clarified for the considered case.

Key words: Fourier series, Dirichlet kernel, Lebesgue variable, asymptotic estimate.

UDC 517.918

PANJARADAGI UCH ZARRACHALI SISTEMAGA MOS MODEL OPERATOR MUHIM SPEKTRINING JOYLASHUV O'RNI**Bahronov B. I. *****REZYUME**

Ushbu maqolada panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos model operator Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator sifatida qaralgan. Ikki o'lchamli qo'zg'alishga ega chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma Fridriks modelining spektral xossalardan foydalanib, qaralayotgan model operatorning muhim spektri tadqiq qilingan. Muhim spektrning ikki va uch zarrachali tarmoqlari ajratilgan. Ikki zarrachali tarmoqlarning uch zarrachali tarmoqqa nisbatan joylashuv o'rnini o'rganilgan.

Kalit so'zlar: Hilbert fazo, model operator, Fridriks modeli, Fredgolm determinanti, muhim spektr.

1. Kirish.

Fizikaning ko'plab sohalorida, xususan qattiq jismlar fizikasi [1], kvant maydon nazariyasi [2] kabi sohalarda panjaradagi ikki va uch zarrachali sistema Hamiltonianlariga mos model operatorlarning muhim spektri va xos qiymatlarining mavjudligi bilan bog'liq masalalar uchrab turadi. Uch zarrachali sistemaga mos model operator muhim spektrining tuzilishini aniqlash [3, 4], xos qiymatlar sonining chekli yoki cheksiz bo'lish shartlarini topish [5, 6, 7] alohida ahamiyat kasb etadi.

Ta'kidlash joizki, [3] maqolada kompakt qo'zg'alishli Fridriks modeli spektri yordamida panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos model operator muhim spektrining joylashuv o'rnini aniqlangan. [4] maqolada esa qo'zg'alish operatori ikki o'lchamli Fredgolm operatori (integral operator) bo'lgan Fridriks modeli uchun olingan natijalar panjaradagi lokal bo'lmagan potensialga ega uch zarrachali model operator muhim spektrining ikki va uch zarrachali tarmoqlarining joylashuv o'rnini, tuzilishi va uni tashkil qiluvchi kesmalar sonini aniqlash imkonini bergan. [5] maqolada dispersiya funksiyasi bir nechta nuqtalarda aynimagan minimumga ega bo'lgan holda panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos model operator uchun cheksiz sondagi xos qiymatlarning mavjudligi isbotlangan hamda xos qiymatlar soni uchun asimptotik formula topilgan.

Shuningdek, [6] maqolada uch o'lchamli panjaradagi ikkita bir xil zarrachalar sistemasiga mos keluvchi ikkita chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma bo'lgan bir o'lchamli qo'zg'alishga ega Fridriks modellari oilasi o'rganilgan. Muhim spektrdan chapda yotuvchi xos qiymatlarning mavjudlik shartlari topilgan. Fridriks modellari oilasi uchun bo'sag'aviy xos qiymat va nol energiyali rezonansning mavjudlik shartlari tahlil qilingan. Olingan natijalar panjaradagi uchta bir xil zarrachalar sistemasiga mos model operator xos qiymatlari sonining chekli yoki cheksiz ekanligini ko'rsatishda hamda xos qiymatlar soni uchun asimptotik formula topishda qo'llanilgan.

*Bahronov B. I. – Buxoro davlat universiteti, b.i.bahronov@buxdu.uz

Bundan tashqari, [7] maqolada [6] maqoladan farqli o'laroq uch o'lchamli panjaradagi ikkita har xil zarrachali sistemaga mos Fridriks modellari oilasi tadqiq qilingan. Bu holda Fridriks modeli uchun quyidagi natijalar olingan: muhim spektrdan chapda joylashgan xos qiymatlar soni aniqlangan; Fredgolv determinantini uchun asimptotik yoyilma olingan; bo'sag'aviy xos qiymat va virtual sathning mavjudlik shartlari topilgan. Olingan natijalar panjaradagi uchta har xil zarrachalar sistemasiga mos model operator xos qiymatlari sonining chekli yoki cheksiz ekanligini ko'rsatishda hamda xos qiymatlar soni uchun asimptotik formula topishda qo'llanilgan.

Aytish lozimki, [8] maqolada cheksiz separabel Hilbert fazosida aniqlangan o'z-o'ziga qo'shma kompakt operatorlar tenzor yig'indisining muhim va diskret spektrlari o'rganilgan. [9] maqolada uch zarrachali model operator muhim spektrining tuzilishi tadqiq qilingan. Manfiy xos qiymatlarning mavjudligi isbotlangan va manfiy xos qiymatlar soni uchun baholash olingan. [10] maqolada uch zarrachali model Shryodinger operatori uchun cheksiz sondagi xos qiymatlarning mavjudligi masalasi o'rganilgan. Model operator muhim spektridan chapda yotuvchi cheksiz sondagi xos qiymatlar mavjud bo'lishining zaruriy va yetarlilik shartlari topilgan.

Mazkur maqolada panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos model operator Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator sifatida o'rganilgan. Uning muhim spektrining ikki va uch zarrachali tarmoqlari ajratilgan. Bu tarmoqlarning joylashuv o'rni ikki o'lchamli qo'zg'alishga ega chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma Fridriks modelining spektral xossalari orqali tadqiq qilingan.

2. Panjaradagi ikkita va uchta zarrachalar sistemalariga mos model operatorlar.

Dastlab zarur tushunchalarni kiritamiz. $\mathbb{T}^d := (-\pi; \pi]^d$ orqali d o'lchamli torni, $L_2(\mathbb{T}^d)$ orqali \mathbb{T}^d torda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatli) funksiyalarning Hilbert fazosini, $L_2^s((\mathbb{T}^d)^2)$ orqali esa $(\mathbb{T}^d)^2$ to'plamda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi) simmetrik funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz.

$L_2^s((\mathbb{T}^d)^2)$ Hilbert fazosida ta'sir qiluvchi va

$$H_{\mu,\lambda} := H_{0,0} - \mu(V_{11} + V_{12}) + \lambda(V_{21} + V_{22}), \quad \mu, \lambda > 0 \quad (1)$$

tenglik orqali aniqlanuvchi model operatorni qaraymiz. Bunda $\mu, \lambda > 0$ ta'sirlashish parametrlari, $H_{0,0}$ operator $L_2^s((\mathbb{T}^d)^2)$ Hilbert fazosidagi ko'paytirish operatori bo'lib,

$$(H_{0,0}f)(p, q) = (u(p) + u(q))f(p, q)$$

tenglik bilan aniqlangan.

V_{ij} , $i, j = 1, 2$ operatorlar esa $L_2((\mathbb{T}^d)^2)$ Hilbert fazosidagi lokal bo'lmagan potensial operatorlar bo'lib, quyidagicha aniqlangan:

$$(V_{i1}f)(p, q) = v_i(p) \int_{\mathbb{T}^d} v_i(t)f(t, q)dt, \quad (V_{i2}f)(p, q) = v_i(q) \int_{\mathbb{T}^d} v_i(t)f(p, t)dt.$$

Bu yerda $u(\cdot)$ va $v_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ funksiyalar \mathbb{T}^d torda aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar.

(1) tenglik yordamida ta’sir qiluvchi $H_{\mu,\lambda}$ model operator $L_2^s((\mathbb{T}^d)^2)$ Hilbert fazosida chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘ladi.

Mazkur maqolaning asosiy natijalarini bayon qilish maqsadida $H_{\mu,\lambda}$ model operator bilan bir qatorda $L_2(\mathbb{T}^d)$ Hilbert fazosida

$$h_{\mu,\lambda} := h_{0,0} - \mu k_1 + \lambda k_2$$

kabi ta’sir qiluvchi operatorni qaraymiz. Bu yerda $h_{0,0}$ operator ko‘paytirish operatori bo‘lib, $L_2(\mathbb{T}^d)$ Hilbert fazosida

$$(h_{0,0}g)(p) = u(p)g(p)$$

tenglik yordamida aniqlangan. k_i , $i = 1, 2$ potensial operatorlari bo‘lib, $L_2(\mathbb{T}^d)$ Hilbert fazosida

$$(k_i g)(p) = v_i(p) \int_{\mathbb{T}^d} v_i(t) f(t) dt, \quad i = 1, 2$$

kabi aniqlangan.

Ko‘rinib turibdiki, k_1 va k_2 integral operatorlar bir o‘lchamlidir. Shu sababli, $h_{\mu,\lambda}$ operatorga ikki o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridriks modeli deb ataladi. Bu operatorning $L_2(\mathbb{T}^d)$ Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator ekanligini oson ko‘rsatish mumkin.

Chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlarga muhim spektrning o‘zgarmasligi haqidagi mashhur Veyl teoremasiga ko‘ra $h_{\mu,\lambda}$ Fridriks modelining muhim spektri $h_{0,0}$ operatorning muhim spektri bilan ustma-ust tushadi. Bizga yaxshi ma’lumki, $h_{0,0}$ ko‘paytirish operatori sof muhim spektrga ega va

$$\sigma_{\text{ess}}(h_{0,0}) = [E_1; E_2]$$

tenglik o‘rinlidir. Bu yerda E_1 va E_2 sonlari

$$E_1 = \min_{p \in \mathbb{T}^d} u(p), \quad E_2 = \max_{p \in \mathbb{T}^d} u(p)$$

tengliklar yordamida aniqlanadi. Demak, $h_{\mu,\lambda}$ Fridriks modelining muhim spektri uchun

$$\sigma_{\text{ess}}(h_{\mu,\lambda}) = [E_1; E_2]$$

tenglikni hosil qilamiz.

Har bir $\mu, \lambda > 0$ sonlari uchun $\mathbb{C} \setminus [E_1; E_2]$ sohada regulyar bo‘lgan

$$\Delta_{\mu,\lambda}(z) := \Delta_{\mu}^{(1)}(z) \Delta_{\lambda}^{(2)}(z) + \mu \lambda I_{12}^2(z)$$

funksiyani qaraymiz, bunda

$$\Delta_{\mu}^{(1)}(z) := 1 - \mu I_{11}(z), \quad \Delta_{\lambda}^{(2)}(z) := 1 + \lambda I_{22}(z),$$

$$I_{\alpha\beta}(z) := \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v_{\alpha}(t)v_{\beta}(t)}{u(t) - z} dt, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Odatda $\Delta_{\mu,\lambda}(\cdot)$ funksiyaga $h_{\mu,\lambda}$ Fridriks modeliga mos Fredholm determinanti deyiladi hamda bu funksiya $h_{\mu,\lambda}$ Fridriks modelining diskret spektrini tadqiq qilishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Quyida $h_{\mu,\lambda}$ Fridriks modeli xos qiymatlari va $\Delta_{\mu,\lambda}(\cdot)$ funksiya nollari orasidagi bog'lanishni ifodalovchi lemmani keltiramiz.

1-lemma. $z \in \mathbb{C} \setminus [E_1; E_2]$ soni $h_{\mu,\lambda}$ Fridriks modelining xos qiymati bo'lishi uchun $\Delta_{\mu,\lambda}(z) = 0$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

$\text{supp}v(\cdot)$ orqali $v(\cdot)$ funksiya tashuvchisini, $\text{mes}(\Omega)$ orqali $\Omega \subset \mathbb{T}^d$ to'plamning Lebeg o'lchovini belgilaymiz.

2-lemma. A) $h_{\mu,\lambda}$ Fridriks modeli E_1 dan chapda va E_2 dan o'ngda joylashgan ko'pi bilan bittadan sodda xos qiymatga ega.

B) Faraz qilaylik,

$$\text{mes}(\text{supp}\{v_1(\cdot)\} \cap \text{supp}\{v_2(\cdot)\}) = 0 \quad (2)$$

shart bajarilsin. U holda $z \in (-\infty; E_1)$ ($z \in (E_2; +\infty)$) soni $h_{\mu,\lambda}$ Fridriks modelining xos qiymati bo'lishi uchun $\Delta_{\mu}^{(1)}(z) = 0$ ($\Delta_{\lambda}^{(2)}(z) = 0$) tenglik o'rinli bo'lishi zarur va yetarlidir.

Yuqoridagi 1-lemma va 2-lemmalarning isbotlari [11] ishda keltirilgan.

3. Panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos model operator muhim spektrining tuzilishi.

Keyingi izlanishlarda (2) shart hamisha bajarilishini talab qilamiz.

$I_{\alpha\alpha}(\cdot)$, $\alpha = 1, 2$ funksiya $(-\infty; E_1)$ va $(E_2; +\infty)$ oraliqlarda monoton o'suvchi bo'lganligi uchun Lebeg integrali ostida limitga o'tish haqidagi teorema ko'ra

$$I_{11}(E_1) = \lim_{z \rightarrow E_1 - 0} I_{11}(z), \quad I_{22}(E_2) = \lim_{z \rightarrow E_2 + 0} I_{22}(z)$$

chekli yoki cheksiz limitlar mavjud bo'ladi.

Ushbu

$$|I_{\alpha\alpha}(E_{\alpha})| < +\infty, \quad \alpha = 1, 2$$

shartlar bajarilganda quyidagicha

$$\mu_0 := (I_{11}(E_1))^{-1}, \quad \lambda_0 := -(I_{22}(E_2))^{-1}$$

belgilash kiritamiz.

$h_{\mu,\lambda}$ Fridriks modelining muhim spektridan tashqarida xos qiymatlari mavjud bo'lgan holda ularni mos ravishda $E_1(\mu)$ va $E_2(\lambda)$ orqali belgilaymiz. Bunda $E_1(\mu) < E_1$ va $E_2(\lambda) > E_2$.

1-teorema. Faraz qilaylik, $|I_{\alpha\alpha}(E_{\alpha})| = +\infty$, $\alpha = 1, 2$ bo'lsin.

U holda $\mu, \lambda > 0$ parametrlarning ixtiyoriy qiymatida $H_{\mu,\lambda}$ model operator ikkita $2E_1(\mu)$ va $2E_2(\lambda)$ oddiy xos qiymatlarga ega bo'lib,

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2];$$

$$\sigma_{\text{pp}}(H_{\mu,\lambda}) = \{2E_1(\mu); E_1(\mu) + E_2(\lambda); 2E_2(\lambda)\}$$

tengliklar o'rinli.

2-teorema. Faraz qilaylik, $|I_{\alpha\alpha}(E_{\alpha})| < +\infty$, $\alpha = 1, 2$ bo'lsin.

A) Agar $0 < \mu \leq \mu_0$ va $0 < \lambda \leq \lambda_0$ bo'lsa, u holda

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; 2E_2]; \quad \sigma_{\text{pp}}(H_{\mu,\lambda}) = \emptyset$$

tengliklar o'rinli;

B) Agar $\mu > \mu_0$ va $0 < \lambda \leq \lambda_0$ bo'lsa, u holda $H_{\mu,\lambda}$ model operator bitta $2E_1(\mu)$ oddiy xos qiymatga ega bo'lib,

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2];$$

$$\sigma_{\text{pp}}(H_{\mu,\lambda}) = \{2E_1(\mu)\}$$

tengliklar o'rinli;

C) Agar $0 < \mu \leq \mu_0$ va $\lambda > \lambda_0$ bo'lsa, u holda $H_{\mu,\lambda}$ model operator bitta $2E_2(\lambda)$ oddiy xos qiymatga ega bo'lib,

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2];$$

$$\sigma_{\text{pp}}(H_{\mu,\lambda}) = \{2E_2(\lambda)\}$$

tengliklar o'rinli;

D) Agar $\mu > \mu_0$ va $\lambda > \lambda_0$ bo'lsa, u holda $H_{\mu,\lambda}$ model operator ikkita $2E_1(\mu)$ va $2E_2(\lambda)$ oddiy xos qiymatlarga ega bo'lib,

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2];$$

$$\sigma_{\text{pp}}(H_{\mu,\lambda}) = \{2E_1(\mu); E_1(\mu) + E_2(\lambda); 2E_2(\lambda)\}$$

tengliklar o'rinli.

Maqolada keltirilgan 1-teorema va 2-teoremlar isbotlari [12,13] ishlarda keltirilgan.

Ushbu belgilashlarni kiritamiz:

$$\mu_1 := (I_{11}(2E_1 - E_2))^{-1}, \quad \lambda_1 := -(I_{22}(2E_2 - E_1))^{-1}.$$

3-teorema. Faraz qilaylik, $|I_{\alpha\alpha}(E_\alpha)| = +\infty, \alpha = 1, 2$ bo'lsin.

A) Agar $0 < \mu \leq \mu_1$ va $0 < \lambda \leq \lambda_1$ bo'lsa, u holda

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tenglik o'rinli;

B) Agar $\mu > \mu_1$ va $0 < \lambda \leq \lambda_1$ bo'lsa, u holda

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tenglik o'rinli bo'lib, $E_1(\mu) + E_2 < 2E_1$ bo'ladi;

C) Agar $0 < \mu \leq \mu_1$ va $\lambda > \lambda_1$ bo'lsa, u holda

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tengliklar o'rinli bo'lib, $2E_2 < E_2(\lambda) + E_1$ bo'ladi;

D) Agar $\mu > \mu_1$ va $\lambda > \lambda_1$ bo'lsa, u holda

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tenglik o'rinli bo'lib, $E_1(\mu) + E_2 < 2E_1$ va $2E_2 < E_2(\lambda) + E_1$ bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, $|I_{\alpha\alpha}(E_\alpha)| = +\infty$, $\alpha = 1, 2$ bo'lsin. U holda 1-teoremaga ko'ra $H_{\mu,\lambda}$ model operatorning muhim spektri uchun

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tenglik o'rinli.

A) Agar $0 < \mu \leq \mu_1$ bo'lsa, u holda $\Delta_\mu^{(1)}(2E_1 - E_2) \geq \Delta_{\mu_1}^{(1)}(2E_1 - E_2) = 0$ bo'ladi, ya'ni $\Delta_\mu^{(1)}(2E_1 - E_2) \geq 0$. $E_1(\mu) < E_1$ soni $h_{\mu,\lambda}$ Fridriks modelini xos qiymati bo'lgani uchun 2-lemmaning B) tasdig'iga ko'ra $\Delta_\mu^{(1)}(E_1(\mu)) = 0$ bo'ladi. Bu munosabatlardan esa $\Delta_\mu^{(1)}(2E_1 - E_2) \geq \Delta_\mu^{(1)}(E_1(\mu))$ tengsizlikni hosil qilamiz. $\Delta_\mu^{(1)}(\cdot)$ funksiya aniqlanishiga ko'ra $(-\infty; E_1)$ oraliqda uzluksiz va kamayuvchi bo'lganligi uchun $E_1(\mu) + E_2 \geq 2E_1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Agar $0 < \lambda \leq \lambda_1$ bo'lsa, u holda $\Delta_\lambda^{(2)}(2E_2 - E_1) \geq \Delta_{\lambda_1}^{(2)}(2E_2 - E_1) = 0$ bo'ladi, ya'ni $\Delta_\lambda^{(2)}(2E_2 - E_1) \geq 0$. $E_2(\lambda) > E_2$ soni $h_{\mu,\lambda}$ Fridriks modelini xos qiymati bo'lgani uchun 2-lemmaning B) tasdig'iga ko'ra $\Delta_\lambda^{(2)}(E_2(\lambda)) = 0$ bo'ladi. Bu munosabatlardan esa $\Delta_\lambda^{(2)}(2E_2 - E_1) \geq \Delta_\lambda^{(2)}(E_2(\lambda))$ tengsizlikni hosil qilamiz. $\Delta_\lambda^{(2)}(\cdot)$ funksiya aniqlanishiga ko'ra $(E_2; +\infty)$ oraliqda uzluksiz va o'suvchi bo'lganligi uchun $2E_2 \geq E_2(\lambda) + E_1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Yuqoridagi munosabatlar

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tenglik o'rinli ekanligini bildiradi. Bu esa teoremaning A) tasdig'ini isbotlaydi.

D) Faraz qilaylik, $\mu > \mu_1$ bo'lsin. U holda $\Delta_\mu^{(1)}(2E_1 - E_2) < \Delta_{\mu_1}^{(1)}(2E_1 - E_2) = 0$ munosabat o'rinlidir, ya'ni $\Delta_\mu^{(1)}(2E_1 - E_2) < 0$. $E_1(\mu) < E_1$ soni $h_{\mu,\lambda}$ Fridriks modelini xos qiymati bo'lgani uchun 2-lemmaning B) tasdig'iga ko'ra $\Delta_\mu^{(1)}(E_1(\mu)) = 0$ bo'ladi. Bu munosabatlardan esa $\Delta_\mu^{(1)}(2E_1 - E_2) < \Delta_\mu^{(1)}(E_1(\mu))$ tengsizlikni hosil qilamiz. $\Delta_\mu^{(1)}(\cdot)$ funksiya $(-\infty; E_1)$ oraliqda uzluksiz va kamayuvchi bo'lganligi uchun $E_1(\mu) + E_2 < 2E_1$ tengsizlik bajariladi.

Agar $\lambda > \lambda_1$ bo'lsa, u holda $\Delta_\lambda^{(2)}(2E_2 - E_1) < \Delta_{\lambda_1}^{(2)}(2E_2 - E_1) = 0$ bo'ladi, ya'ni $\Delta_\lambda^{(2)}(2E_2 - E_1) < 0$. $E_2(\lambda) > E_2$ soni $h_{\mu,\lambda}$ Fridriks modelini xos qiymati bo'lgani uchun 2-lemmaning B) tasdig'iga ko'ra $\Delta_\lambda^{(2)}(E_2(\lambda)) = 0$ bo'ladi. Bu munosabatlardan esa $\Delta_\lambda^{(2)}(2E_2 - E_1) < \Delta_\lambda^{(2)}(E_2(\lambda))$ tengsizlikni hosil qilamiz. $\Delta_\lambda^{(2)}(\cdot)$ funksiya $(E_2; +\infty)$ oraliqda uzluksiz va o'suvchi bo'lganligi uchun $2E_2 < E_2(\lambda) + E_1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi va shu orqali teoremaning D) tasdig'i isbotlanadi. Teoremaning B) va C) tasdiqlari ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

1-eslatma. Ushbu $\mu_0 < \mu_1$ va $\lambda_0 < \lambda_1$ tengsizliklar o'rinli.

4-teorema. Faraz qilaylik, $|I_{\alpha\alpha}(E_\alpha)| < +\infty$, $\alpha = 1, 2$ bo'lsin.

A₁) Agar $0 < \mu \leq \mu_0$ va $0 < \lambda \leq \lambda_0$ bo'lsa, u holda

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; 2E_2]$$

tenglik o‘rinli;

A₂) Agar $\mu_0 < \mu \leq \mu_1$ va $0 < \lambda \leq \lambda_0$ bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; 2E_2]$$

tenglik o‘rinli;

A₃) Agar $\mu > \mu_1$ va $0 < \lambda \leq \lambda_0$ bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2]$$

kabi bo‘lib, $E_1(\mu) + E_2 < 2E_1$ tengsizlik o‘rinli;

B₁) Agar $0 < \mu \leq \mu_0$ va $\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_1$ bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tenglik o‘rinli;

B₂) Agar $\mu_0 < \mu \leq \mu_1$ va $\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_1$ bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tenglik o‘rinli;

B₃) Agar $\mu > \mu_1$ va $\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_1$ bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

kabi bo‘lib, $E_1(\mu) + E_2 < 2E_1$ tengsizlik o‘rinli;

C₁) Agar $0 < \mu \leq \mu_0$ va $\lambda > \lambda_1$ bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

kabi bo‘lib, $2E_2 < E_2(\lambda) + E_1$ tengsizlik o‘rinli;

C₂) Agar $\mu_0 < \mu \leq \mu_1$ va $\lambda > \lambda_1$ bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

kabi bo‘lib, $2E_2 < E_2(\lambda) + E_1$ tengsizlik o‘rinli;

C₃) Agar $\mu > \mu_1$ va $\lambda > \lambda_1$ bo‘lsa, u holda

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2] \cup [E_2(\lambda) + E_1; E_2(\lambda) + E_2]$$

tenglik o‘rinli bo‘lib, $E_1(\mu) + E_2 < 2E_1$ va $2E_2 < E_2(\lambda) + E_1$ bo‘ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $|I_{\alpha\alpha}(E_\alpha)| < +\infty$, $\alpha = 1, 2$ shart bajarilsin.

A₁) Agar $0 < \mu \leq \mu_0$ va $0 < \lambda \leq \lambda_0$ bo‘lsa, u holda 2-teoremaning A) tasdig‘iga ko‘ra $H_{\mu,\lambda}$ model operatorning muhim spektri uchun

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [2E_1; 2E_2]$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

A_2) Agar $\mu_0 < \mu \leq \mu_1$ va $0 < \lambda \leq \lambda_0$ bo'lsa, u holda 2-teoremaning B) tasdig'iga ko'ra $H_{\mu,\lambda}$ model operatorning muhim spektri uchun

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; E_1(\mu) + E_2] \cup [2E_1; 2E_2]$$

tenglik o'rinli bo'ladi hamda $\Delta_{\mu}^{(1)}(2E_1 - E_2) \geq \Delta_{\mu_1}^{(1)}(2E_1 - E_2) = 0$ munosabat o'rinli, ya'ni $\Delta_{\mu}^{(1)}(2E_1 - E_2) \geq 0$. $E_1(\mu) < E_1$ soni $h_{\mu,\lambda}$ Fridriks modelining xos qiymati bo'lgani uchun 2-lemmaning B) tasdig'iga ko'ra $\Delta_{\mu}^{(1)}(E_1(\mu)) = 0$ bo'ladi. Bu munosabatlardan esa $\Delta_{\mu}^{(1)}(2E_1 - E_2) \geq \Delta_{\mu}^{(1)}(E_1(\mu))$ tengsizlikni hosil qilamiz. $\Delta_{\mu}^{(1)}(\cdot)$ funksiyaning aniqlanishiga ko'ra bu funksiya $(-\infty; E_1)$ oraliqda uzluksiz va kamayuvchi hamda $E_1(\mu) + E_2 \geq 2E_1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Yuqoridagi munosabatlardan

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_1(\mu) + E_1; 2E_2]$$

tenglik kelib chiqadi. Bu esa teoremaning A_2 tasdig'ini isbotlaydi. Teoremaning qolgan tasdiqlari ham A_1 va A_2 tasdiqlar kabi isbotlanadi.

Xulosa. Maqolada qattiq jismlar fizikasi, kvant maydon nazariyasi va boshqa ko'plab sohalarda uchraydigan panjaradagi uch zarrachali sistema Hamiltonianiga mos $H_{\mu,\lambda}$ model operator qaralgan, bu yerda $\mu, \lambda > 0$ - ta'sirlashish parametrlari. $H_{\mu,\lambda}$ model operator muhim spektrining joylashuv o'rni ikki o'lchamli qo'zg'alishga ega $h_{\mu,\lambda}$ Fridriks modeli spektral xossalardan foydalanib o'rganilgan.

ADABIYOTLAR

1. Faria da Veiga P.A., Ioriatti L., O'Caroll M. Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schrodinger Hamiltonians. Phys. Rev. E. 66:3 (2002), 016130.
2. Malyshev V.A., Minlos R.A. Linear infinite-particle operators. Translations of Mathematical Monographs. 143, AMS, Providence, RI, 1995.
3. Расулов Т.Х., Рахмонов А.А. Уравнение Фаддеева и местоположение существенного спектра одного трёхчастичного модельного оператора. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2011, выпуск 2(23), 170–180.
4. Расулов Т.Х. О существенном спектре одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решётке. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2011, выпуск 3 (24), 42–51.
5. Расулов Т.Х. Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке. Теоретическая и математическая физика. 163:1 (2010), С. 34–44.
6. Albeverio S., Lakaev S.N., Djumanova R.Kh. The essential and discrete spectrum of a model operator associated to a system of three identical particles. Reports on Mathematical Physics. 63:3 (2009), pp. 359-380.
7. S.Albeverio, S.N.Lakaev, Z.I.Muminov. On the Number of Eigenvalues of a Model Operator Associated to a System of Three-Particles on Lattices. Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 14, No. 4, 2007, pp. 377–387.

8. Эшкабилов Ю.Х. О спектре тензорной суммы компактных операторов. *Uzbek Mathematical Journal*, 2005, no. 3, pp. 104–112.
9. Арзикулов Г.П., Эшкабилов Ю.Х. О спектральных свойствах одного трехчастичного модельного оператора. *Известия вузов. Математика*. N 5 (2020), С. 3–10.
10. Эшкабилов Ю.Х. Эффект Ефимова для одного "трехчастичного" дискретного оператора Шредингера. *Теор. и матем. физика*, 164:1 (2010), С. 78–87.
11. Расулов Т.Х., Бахронов Б.И. Пороговые собственные значение и резонансы модели Фридрихса с двумерным возмущением. *Научный вестник БухГУ*, N 3 (2019), С. 31-38.
12. T.H.Rasulov, B.I.Bahronov. Existence of the eigenvalues of a tensor sum of the Friedrichs models with rank 2 perturbation. *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, 14:2 (2023), pp. 151–157.
13. Б.И.Бахронов, Т.Х.Расулов, М.Рехман. Условия существования собственных значений трехчастичного решетчатого модельного гамильтониана. *Известия вузов. Математика*. (2023), С. 1–10.

РЕЗЮМЕ

В данной статье модельный оператор, соответствующий системе трех частиц на решетке, рассматривается как линейный, ограниченный и самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Используя спектральные свойства линейной, ограниченной и самосопряженной модели Фридрихса с двумерным возмущением, исследован существенный спектр рассматриваемого модельного оператора. Выделены двухчастичные и трехчастичные ветви существенного спектра. Изучено расположение двухчастичных ветвей относительно трехчастичной ветви.

Ключевые слова: Гильбертово пространство, модельный оператор, модель Фридрихса, определитель Фредгольма, существенный спектр.

RESUME

In this paper, the model operator corresponding to the three particle systems in the lattice is considered as a linear, bounded and self-adjoint operator in Hilbert space. Using the spectral properties of the linear, bounded and self-adjoint Friedrichs model with two-dimensional perturbation, the essential spectrum of the considered model operator was investigated. Two-particle and three-particle branches of the essential spectrum are singled out. The position of two-particle branches with respect to a three-particle branch is studied.

Key words: Hilbert space, model operator, Friedrichs model, Fredholm determinant, essential spectrum.

UDC 517.956.4, 519.633.2

**MATHEMATICAL MODELING OF THE DOUBLE NONLINEAR
EXSPONENTIAL INHOMOGENEOUS DENSITY HEAT DISSIPATION
PROCESS**

Begulov U. U. * Khaydarov A. T. * Salimov J. I. *

RESUME

In this article, the properties of self-similar solutions of the Cauchy problem for the equation with double nonlinear exponential effects are studied. The existence conditions of Fujita-type global solutions are defined. Also, the conditions for having a lower solution for the equation were found.

Key words: asymptotic behavior, mathematical modeling, self-similar solutions, lower solution, parabolic equations.

INTRODUCTION

In this paper, we present below the Cauchy problem for the equation representing the process of heat propagation in a nonlinear medium with exponentially varying density

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^\sigma \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

and

$$u(t, x) |_{t=0} = u_0(x) \geq 0, \quad x \in R, \quad (2)$$

where $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R\}$, $p \geq 2$, $\sigma \in R_+$, $\rho(x) = e^x$.

Equation (1) represents a number of physical processes: the reaction in a nonlinear medium represents the diffusion process, the heat dissipation process in a non-homogeneous nonlinear medium, the filtration process in liquids and gases, the biological population, the law of polytraphy, and other nonlinear processes.

There are several ways to solve this equation, from which the solution of the equation through a self-similar solution is considered. Currently, the concept of a self-similar solution has become very popular in the research of non-linear heat dissipation processes [3].

The (1)-(2) arises in different applications [1]-[3]. Equation (1) is degenerate type. Therefore, in the domain Q , where $u = 0, \nabla u = 0$ it is a degenerate type. Therefore, in this case, we need to consider a weak solution from having a physical sense class.

We say that $u(t, x)$ is the weak solution to the problem (1)-(2) in $Q_T = \{(t, x) | 0 < t_0 < t < T, x \in R^N\}$ if $u(t, x) \in C(Q_T)$, $\nabla u \in L^1_{loc}(0, T; L^1_{loc}(R^N))$ and (1)-(2) is satisfied in the sense of distribution in Q_T , where $T > t_0$ is the maximal existence time.

***Begulov U. U.** – National University of Uzbekistan, begulov0108@gmail.com

***Khaydarov A. T.**, – National University of Uzbekistan, haydarovabdu@rambler.ru

***Salimov J. I.**, – National University of Uzbekistan, jasurbek.salimov1997@gmail.com

The local existence in time and uniqueness of solutions and the comparison principle for the problem (1)-(2) can be found in [3].

In [4] given an asymptotic analysis of the behavior of blow-up solutions of the following equation

$$\rho(x)u_t = (u^m)_{xx} \text{ in } Q = R \times R_+,$$

where

$$\rho(x) = |x|^{-\alpha}, e^{-x^2}, e^{-x}.$$

In [2], [5] authors considered a nonlinear parabolic equation with a source and an inhomogeneous density of the following form:

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (u^{m-1} |Du|^{p-2} Du) + u^\beta,$$

and

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (u^{m-1} |Du|^{p-2} Du) + \rho(x) u^\beta,$$

where

$$\rho(x) = |x|^{-n} \text{ or } \rho(x) = (1 + |x|)^{-n}, n \geq 0.$$

They found conditions which the solution of the Cauchy problem explodes in a finite time at critical parameters $\beta_* = m + p - 2 + p/N$,

$$n^* = \begin{cases} \frac{N(m+p-3)+p}{m+p-2} & \text{where } p < N, \\ p & \text{where } p \geq N. \end{cases}$$

Authors of the work [6] established asymptotics of the solutions and gave global solvability for the following problem

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial u^m}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u^m}{\partial x} \right), \quad (x, t) \in R_+ \times (0, +\infty),$$

$$u(0, x) = u_0(x), x \in R^N.$$

In [7], authors study the global solvability and unsolvability conditions of a nonlinear filtration problem with nonlinear boundary flux and establish the critical global existence exponent and critical Fujita exponent of nonlinear filtration problem in inhomogeneous medium. An asymptotic representation of the solution with a compact support is obtained, which made it possible to carry out a numerical experiment.

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho(x) u^\beta, \quad (x, t) \in R_+ \times (0, +\infty),$$

with nonlinear boundary flux

$$-\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u^q(0, t), t > 0$$

and $u(0, x) = u_0(x) \geq 0, x \in R_+$.

where $p > 2, \beta, q > 0, \rho(x) = x^{-n}, n \in R, u_0(x)$ is a bounded, continuous, nonnegative and nontrivial initial data.

In [8], authors were established the long time asymptotic of solutions for the critical value of parameter for problem (1)-(2) in case $\sigma = 0, p = 2, \rho(x) = 1$ and has. an absorption. They considered following semi-linear parabolic equation

$$u_t - \Delta u + u^\beta = 0, t > 0, \quad (3.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0. \quad (4.1)$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \beta = 1 + \frac{2}{N}.$$

The solution of problem (3.1) - (4.1) is "infinity" energy. The initial data is

$$u(t, x) = [(T + t) \ln(T + t)]^{-\frac{N}{2}} g_* \left(\frac{x}{(T + t)^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (5.1)$$

For g_* function upper and lower bounds were obtained

$$C_1 \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right) \leq g_*(\xi) \leq C_2 \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right), |\xi|^2 = \frac{|x|^2}{T + t},$$

where C_1, C_2 are constants.

For $\beta \neq 1 + \frac{2}{N}$, the approximate self-similar differs from (5.1), which means that for critical values the asymptotic of the solutions will change.

In [9], The properties of solutions of self-similar and approximately self-similar system of the reaction-diffusion with double nonlinearity are investigated. The influence of numerical parameters to an evolution of the studied process is established. The existence of finite and quenching solutions is proved and their asymptotic behavior at the infinity is described. The condition of global solvability to the Cauchy problem, generalizing the results of other authors, is found. Knerr-Kersner type estimate for free boundary is obtained.

$$Au \equiv -\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} + L(n, m, p)u + \varepsilon \gamma(t) \rho(x) u^\beta = 0,$$

$$u(0, x) = u_0(x), x \in R^N.$$

where $L(n, m, p)u = \nabla(|x^n| u^{m-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u), \beta \geq 1, n, p, m$ -are the given numerical parameters, $\nabla(\cdot) = grad_x(\cdot), 0 < \gamma(t) \in C(0, \infty), \varepsilon = \pm 1, \rho(x) = |x|^{\delta-2}$.

Furthermore, in [10], nonlinear diffusion, filtration, heat dissipation processes

as part of the research of new properties of expressive mathematical models, the exponential in environments with visual density and in cases where there is absorption of heat prevalence has been analyzed. The exponential density effect is calculated so that the self-similar solution is found and the front received an assessment for.

THE SELF-SIMILAR ANALYSIS OF THE PROBLEM

Let's look at the solution of equation (1) in the form of $u(t, x) = u(t, r(x))$, here

$$r(x) = pe^{\frac{x}{p}} \quad (3)$$

by substitution, equation (1) becomes the following form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r^{p-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{p-1} u^\sigma \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (4)$$

We look for the solution of equation (4) $u(t, r)$ in the following form

$$u(t, r) = f(\xi), \xi = rt^{-\frac{1}{p}} \quad (5)$$

After substituting (5), the equation (4) takes the following form

$$\xi^{1-p} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{p-1} f^\sigma \left| \frac{df}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df}{d\xi} \right) + \frac{1}{p} \xi \frac{df}{d\xi} = 0 \quad (6)$$

According to the statement of the original problem we will consider nontrivial, compactly supported weak solution of the equation (6) satisfying the following conditions

$$f(0) = M, M \in R_+, f(d) = 0, 0 < d < \infty \quad (7)$$

Using the solution comparison method of [1] and the standard equations method of [3] for solving the problem (6)-(7), we can obtain the estimates for the solution of the problem (1)-(2).

To find a solution to the equation (6), we introduce another repeating self-similar pattern[11]:

$$\bar{f}(\xi) = B(a - \xi^{\gamma_1})^{\gamma_2} \quad (8)$$

where $a \geq 0; \gamma_i \geq 0, i = 1, 2$

Taking into account (8), we perform calculations for equation (6):

$$\begin{aligned} \xi^{p-1} \bar{f}^\sigma \left| \frac{d\bar{f}}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\bar{f}}{d\xi} &= \xi^{p-1} B^\sigma (a - \xi^{\gamma_1})^{\sigma\gamma_2} \left| -B\gamma_1\gamma_2 (a - \xi^{\gamma_1})^{\gamma_2-1} \xi^{\gamma_1-1} \right|^{p-2} \cdot \\ &\cdot (-B\gamma_1\gamma_2 (a - \xi^{\gamma_1})^{\gamma_2-1} \xi^{\gamma_1-1}) = -B^{\sigma+p-1} \gamma_1^{p-1} \gamma_2^{p-1} \xi^{(p-1)\gamma_1} (a - \xi^{\gamma_1})^{(\gamma_2-1)(p-1)+\sigma\gamma_2} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \xi^{1-p} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{p-1} \bar{f}^\sigma \left| \frac{d\bar{f}}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\bar{f}}{d\xi} \right) + \frac{1}{p} \xi \frac{d\bar{f}}{d\xi} &= -B^{\sigma+p-1} \gamma_1^{p-1} \gamma_2^{p-1} (p-1) \gamma_1 \xi^{(p-1)(\gamma_1-1)-1} \cdot \\ \cdot (a - \xi^{\gamma_1})^{(\gamma_2-1)(p-1)+\sigma\gamma_2} + B^{\sigma+p-1} \gamma_1^{p-1} \gamma_2^{p-1} \gamma_1 ((\gamma_2-1)(p-1) + \sigma\gamma_2) &\xi^{(p-1)(\gamma_1-1)+\gamma_1-1} \cdot \\ \cdot (a - \xi^{\gamma_1})^{(\gamma_2-1)(p-1)+\sigma\gamma_2-1} - \frac{1}{p} B \gamma_1 \gamma_2 \xi^{\gamma_1-1+1} (a - \xi^{\gamma_1})^{\gamma_2-1} & \end{aligned} \quad (9)$$

We divide each term of equation (8) by $-B\gamma_1\gamma_2\xi^{\gamma_1-1+1}(a-\xi^{\gamma_1})^{\gamma_2-1}$ as follows:

$$B^{\sigma+p-2}\gamma_1^{p-2}\gamma_2^{p-2}(p-1)\gamma_1\xi^{(p-1)(\gamma_1-1)-1-\gamma_1}(a-\xi^{\gamma_1})^{(\gamma_2-1)(p-1)+\sigma\gamma_2-\gamma_2+1} - \\ -B^{\sigma+p-2}\gamma_1^{p-2}\gamma_2^{p-2}\gamma_1((\gamma_2-1)(p-1)+\sigma\gamma_2)\xi^{(p-1)(\gamma_1-1)-1}(a-\xi^{\gamma_1})^{(\gamma_2-1)(p-1)+\sigma\gamma_2-\gamma_2} + \frac{1}{p} = 0 \quad (10)$$

Now we will find the unknown parameters from equality (10):

$$(p-1)(\gamma_1-1)-1=0 \Rightarrow \gamma_1 = \frac{p}{p-1} \quad (11) \\ (\gamma_2-1)(p-1)+\sigma\gamma_2-\gamma_2=0 \Rightarrow \gamma_2 = \frac{p-1}{\sigma+p-2}$$

Using (11), we rewrite equation (10) as follows:

$$B^{\sigma+p-2}\gamma_1^{p-1}\gamma_2^{p-2}(p-1)\xi^{-\gamma_1}(a-\xi^{\gamma_1}) - B^{\sigma+p-2}\gamma_1^{p-1}\gamma_2^{p-1} + \frac{1}{p} = 0 \quad (12)$$

Using $\xi^{\gamma_1} = a - (a - \xi^{\gamma_1})$, we write (12) as follows:

$$(a-\xi^{\gamma_1})\left(B^{\sigma+p-2}\gamma_1^{p-1}\gamma_2^{p-2}(p-1) + B^{\sigma+p-2}\gamma_1^{p-1}\gamma_2^{p-1} - \frac{1}{p}\right) - a\left(B^{\sigma+p-2}\gamma_1^{p-1}\gamma_2^{p-1} - \frac{1}{p}\right) = 0 \\ B^{\sigma+p-2}\gamma_1^{p-1}\gamma_2^{p-2}(p-1) + B^{\sigma+p-2}\gamma_1^{p-1}\gamma_2^{p-1} - \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow B = \left[\frac{p-1}{\gamma_2 p} \left(\frac{1}{p(\sigma+p-1)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{\gamma_2} \quad (13)$$

Theorem 1. If $\gamma_1 = \frac{p}{p-1}$, $\gamma_2 = \frac{p-1}{\sigma+p-2}$, $B = \left[\frac{p-1}{\gamma_2 p} \left(\frac{1}{p(\sigma+p-1)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{\gamma_2}$ and $-a\left(B^{\sigma+p-2}\gamma_1^{p-1}\gamma_2^{p-1} - \frac{1}{p}\right) > 0$, the following estimate is appropriate for the solution of equation (1): $u(t, x) \geq u_-(t, x)$, Here $u_-(t, x) = B(a - \xi^{\gamma_1})^{\gamma_2}$.

Proof. If $-a\left(B^{\sigma+p-2}\gamma_1^{p-1}\gamma_2^{p-1} - \frac{1}{p}\right) > 0$, $Lu_-(t, x) \geq 0$ will be, that is, $u_-(t, x)$ will be a lower solution. Combining all the calculated equalities, we get the self-similar solution we are looking for:

$$u_-(t, x) = \left[\frac{p-1}{\gamma_2 p} \left(\frac{1}{p(\sigma+p-1)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{\gamma_2} \left(a - \left[pe^{\frac{x}{p}}t^{-\frac{1}{p}}\right]^{\gamma_1}\right)^{\gamma_2} \quad (14)$$

ASYMPTOTICS BEHAVIOR OF COMPACTLY SUPPORTED WEAK SOLUTION

The next stage of the research is study the asymptotics of self-similar solution of problem (6), which allowed to obtain numerical results.

We show that the function $\bar{f}(\xi) = B\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\gamma_2}$ which obtained on the based of the standard equation method [3] is the asymptotic behavior of the self-solution problem (6).

Here $\gamma_2 = \frac{p-1}{\sigma+p-2}$, $B = \left[\frac{p-1}{\gamma_2 p} \left(\frac{1}{p(\sigma+p-1)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{\gamma_2}$, $(b)_+ = \max(b, 0)$.

Theorem 2. Any solution of problem (6)-(7) has asymptotics as follows

$$f(\xi) = \bar{f}(\xi)(1 + o(1)).$$

Proof. We will search a solution to equation (6) in the following form

$$f(\xi) = \bar{f}(\xi)y(\eta) \quad (15)$$

Here $\eta = -\ln\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)$, $y(\eta)$ is to be determined.

Now let us investigate the asymptotic behavior of solution of the equation (6) at $\xi_1 = \xi \rightarrow a^{\frac{p-1}{p}}$.

Using (15), we perform the following calculations for equation (6):

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\xi} &= \frac{d\bar{f}}{d\xi}y(\eta) + \bar{f}\frac{dy(\eta)}{d\eta}\frac{d\eta}{d\xi} = B\frac{p-1}{\sigma+p-2}\left(-\frac{p}{p-1}\right)\xi^{\frac{1}{p-1}}\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{\sigma+p-2}-1}y(\eta) + \\ &+ B\frac{p}{p-1}\xi^{\frac{1}{p-1}}\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{\sigma+p-2}-1}\frac{dy(\eta)}{d\eta} = B\frac{p}{p-1}\xi^{\frac{1}{p-1}}\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma+p-2}}\left[\frac{dy(\eta)}{d\eta} - \frac{p-1}{\sigma+p-2}y(\eta)\right] \cdot \\ &\cdot \xi^{p-1}f^\sigma \left|\frac{df}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df}{d\xi} = \xi^{p-1}B^\sigma\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{\sigma(p-1)}{\sigma+p-2}}B^{p-2}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-2}\xi^{\frac{p-2}{p-1}}\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(1-\sigma)(p-2)}{\sigma+p-2}} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{dy(\eta)}{d\eta} - \frac{p-1}{\sigma+p-2}y(\eta)\right]^{p-2}B\frac{p}{p-1}\xi^{\frac{1}{p-1}}\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma+p-2}}\left[\frac{dy(\eta)}{d\eta} - \frac{p-1}{\sigma+p-2}y(\eta)\right]y^\sigma(\eta) = \\ &= B^{\sigma+p-1}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\xi^p\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{\sigma+p-2}}y^\sigma(\eta)\left[\frac{dy(\eta)}{d\eta} - \frac{p-1}{\sigma+p-2}y(\eta)\right]^{p-2}\left[\frac{dy(\eta)}{d\eta} - \frac{p-1}{\sigma+p-2}y(\eta)\right] \end{aligned}$$

We introduce the notation

$$\begin{aligned} L_y &= y^\sigma(\eta)\left[\frac{dy(\eta)}{d\eta} - \frac{p-1}{\sigma+p-2}y(\eta)\right]^{p-2}\left[\frac{dy(\eta)}{d\eta} - \frac{p-1}{\sigma+p-2}y(\eta)\right]\xi^{1-p}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{p-1}f^\sigma\left|\frac{df}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df}{d\xi}\right) + \frac{1}{p}\xi\frac{df}{d\xi} = \\ &B^{\sigma+p-1}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}p\xi^{p-1}\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{\sigma+p-2}}\xi^{1-p}L_y - B^{\sigma+p-1}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\frac{p-1}{\sigma+p-2}\frac{p}{p-1}\xi^{\frac{p}{p-1}} \\ &\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma+p-2}}L_y + B^{\sigma+p-1}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\frac{p}{p-1}\xi^{\frac{p}{p-1}}\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma+p-2}}\frac{dL_y}{d\eta} + \\ &+ \frac{1}{p}\xi B\frac{p}{p-1}\xi^{\frac{1}{p-1}}\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma+p-2}}\left[\frac{dy(\eta)}{d\eta} - \frac{p-1}{\sigma+p-2}y(\eta)\right] = 0 \\ &\frac{dL_y}{d\eta} + (p-1)\xi^{-\frac{p}{p-1}}\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)L_y - \frac{p-1}{\sigma+p-2}L_y + B^{-\sigma-p+2}\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{dy(\eta)}{d\eta} - \frac{p-1}{\sigma+p-2}y(\eta)\right] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

We rewrite equation (16) using $a - \xi^{\frac{p}{p-1}} = e^{-\eta} \Rightarrow \xi^{\frac{p}{p-1}} = a - e^{-\eta}$

$$\frac{dL_y}{d\eta} + (p-1)\frac{e^{-\eta}}{a - e^{-\eta}}L_y - \frac{p-1}{\sigma+p-2}L_y + B^{-\sigma-p+2}\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}\left[\frac{dy(\eta)}{d\eta} - \frac{p-1}{\sigma+p-2}y(\eta)\right] = 0 \quad (17)$$

It is supposed that $\xi \in [\xi_0, \xi_1)$, $0 < \xi_0 < \xi_1$.

Therefore, the function $\eta(\xi)$ has the properties: $\eta'(\xi) > 0$ at $\xi \in [\xi_0, \xi_1)$, $\eta_0 = \eta(\xi_0) > 0$, $\lim_{\xi \rightarrow \xi_1} \eta(\xi) = +\infty$. Note that the study of the solutions of the (17) is equivalent to the study of those solution of the equation (1), each of which in some interval $[\eta_0, +\infty)$ satisfies inequalities:

$$y(\eta) > 0, L_y \neq 0$$

First we show that the solutions of $y(\eta)$ of equation (17) has a finite limit of y_0 at

$\eta \rightarrow +\infty$. We rewrite equation (17) as follows

$$\frac{dL_y}{d\eta} = -(p-1)\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}L_y + \frac{p-1}{\sigma+p-2}L_y - B^{-\sigma-p+2}\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}\left[\frac{dy(\eta)}{d\eta} - \frac{p-1}{\sigma+p-2}y(\eta)\right] \quad (18)$$

To analyze the solutions of the (18) equation we introduce an auxiliary function

$$h(\theta, \eta) = -(p-1)\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}\theta + \frac{p-1}{\sigma+p-2}\theta - B^{-\sigma-p+2}\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}\left[\frac{dy(\eta)}{d\eta} - \frac{p-1}{\sigma+p-2}y(\eta)\right]$$

where θ is real number.

$$\theta = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} L_y = -y^{\sigma+p-1} \left[\frac{p-1}{\sigma+p-2} \right]^{p-1}$$

From here it is easy to see that for each value θ the function $h(\theta, \eta)$ preserves sign on some interval $[\eta_1, +\infty) \subset [\eta_0, +\infty)$ and for all $\eta \in [\eta_1, +\infty)$ one of the inequalities is satisfied

$$h(\theta, \eta) > 0 \text{ or } h(\theta, \eta) < 0$$

And so, for function $h(\theta, \eta)$ exist a limit at $\eta \in [\eta_1, +\infty)$. The expression for $h(\theta, \eta)$ follows that

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow +\infty} h(\theta, \eta) = \\ & - \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left[(p-1)\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}\theta - \frac{p-1}{\sigma+p-2}\theta + B^{-\sigma-p+2}\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}\left[\frac{dy(\eta)}{d\eta} - \frac{p-1}{\sigma+p-2}y(\eta)\right] \right] \end{aligned} \quad (19)$$

It is obvious that

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{dy(\eta)}{d\eta} = 0.$$

Then from (19) we obtain the following algebraic equation

$$\begin{aligned} \frac{p-1}{\sigma+p-2} \left(\frac{p-1}{\sigma+p-2} \right)^{p-1} y_0^{\sigma+p-1} &= B^{-\sigma-p+2} \frac{1}{p} \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1} \left[\frac{p-1}{\sigma+p-2} y_0 \right] \\ y_0 &= B^{-1} \frac{1}{p^{\frac{1}{\sigma+p-2}}} \left(\frac{\sigma+p-2}{p} \right)^{\frac{p-1}{\sigma+p-2}} \end{aligned}$$

From this expression, it is easy to see that the equation (15) has a solution $y(\eta)$ with a finite non-zero limit at $\eta \rightarrow +\infty$.

Then the compactly supported solution of the problem (6)-(7) has an asymptotic of the form (15) at $\xi \rightarrow a^{\frac{p-1}{p}}$. The theorem is proved.

Corollary 1. A weak solution of the equation (1) has the following asymptotic

$$u_A(t, x) \approx y_0 B \left(a - \left[\frac{pe^{\frac{x}{p}}}{t^{\frac{1}{p}}} \right]^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\gamma_2}$$

at $x \rightarrow \ln\left(\frac{a^{p-1}t}{p^p}\right)$, where constants B, γ_2 defined above.

Corollary 2. Where $u_0(x) \geq u_-(0, x)$, $u_-(0, x)$ is the lower solution of the problem (1)-(2).

CONCLUSION

It has been studied in the article for the nonlinear modeling of processes including diffusion, filtration, and exponential inhomogeneous density heat dissipation among others that a finite speed of perturbation can have an impact. By utilizing a self-similar analysis of the solution, an asymptotically weak solution was found. It is shown that the coefficients of the main terms of the asymptotic solution fulfill the system of an algebraic equation.

REFERENCES

1. A.A. Samarskii, V.A. Galaktionov, S.P. Kurdyumov and A.P. Mikhailov. Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations, Berlin, 4, Walter de Grueter, p. 535, 1995.
2. A.V. Martynenko, A.F. Tedeev and V.N. Shramenko, "Cauchy problem for a degenerate parabolic equation with inhomogeneous density and source in class slowly tending to zero initial functions" Izv. RAN. Ser. Mat., 2012, volume 76, issue 3, pp. 139–156.
3. M. Aripov and S. Sadullaeva, Computer simulation of nonlinear diffusion processes. National University of Uzbekistan Press, Tashkent 2020, 670 pp.
4. Galaktionov V., King J.R. On the behaviour of blow-up interfaces for an inhomogeneous filtration equation. Journal of Applied Mathematics, Vol. 57, Issue1, 53–77 (1996).
5. Martynenko A., Tedeev A. Cauchy Problem for a quasilinear parabolic equation with source and inhomogeneous density. Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 47, No. 2, 245–255 (2007).
6. Aripov M., Rakhmonov Z. Asymptotics of self-similar solutions of a nonlinear polytropic filtration problem with a nonlinear boundary condition. Vychislitel'nye tekhnologii, Vol. 18, No. 4, 50–55 (2013).
7. Z. R. Rakhmonov, A.I. Tillaev On the behavior of the solution of a nonlinear polytropic filtration problem with a source and multiple nonlinearities. NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS, 2018, 9(3), P. 323–329.
8. Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Samararskiy A.A. On asymptotic "eigenfunctions" of the Cauchy problem for a nonlinear parabolic equation. Mathematics of the USSR-Sbornik, Vol. 54, No. 2, 421–455 (1986). DOI:10.1070/SM1986v054n02ABEH002979
9. Mersaid Aripov, Shakhlo A. Sadullaeva† To Properties of Solutions to Reaction-diffusion Equation with Double Nonlinearity with Distributed Parameters. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2013, 6(2), 157–167
10. Xaydarov A.T., Begulov U.U. Eksponensial o'zgaruvchan zichlikli chiziqsiz muhitda issiqlik tarqalish jarayonini matematik modellashtirish. O'zMU xabarlar, 2023 1/1 Aniq fanlar, 246–53 b.

11. Begulov U.U. Mathematical modeling of the double nonlinear exponential inhomogeneous density heat dissipation process. Zamonaviy matematikaning dolzarb muammolari va tatbiqlari yosh olimlarning ilmiy konferensiyasi tezislari to'plami.14-15 Mart 2024, Toshkent, O'zbekiston, P. 44–45.

REZYUME

Ushbu maqolada ikki karra nochiziqli eksponensial ta'siriga ega tenglama uchun Koshi masalasi avtomodel yechimlarining xossalari o'rganilgan. Fujita tipidagi global yechimlarning mavjudlik shartlari aniqlangan. Shunindek, tenglama uchun quyi yechimga ega bo'lish shartlari topilgan.

Kalit so'zlar: asimptotika, matematik model, avtomodel yechim, quyi yechim, parabolic tenglamalar.

РЕЗЮМЕ

В данной статье изучаются свойства автомодельных решений задачи Коши для уравнения с двойными нелинейными экспоненциальными эффектами. Определены условия существования автомодельных решений типа Фуджиты. Также были найдены условия существования нижнего решения уравнения.

Ключевые слова: асимптотика, математическое моделирование, автомодельные решения, нижнее решение, параболические уравнения.

UDC 517.55

ESTIMATION OF UNKNOWN PARAMETER OF GAMMA DISTRIBUTION
IN INCOMPLETE MODELS OF STATISTICS

Berdimuradov M. B. *

RESUME

In this paper, we consider estimating the parameters of the gamma distribution under censored observations. The maximum likelihood method is used, as well as the MATLAB software tool, to find MLE estimates using numerical optimization methods such as the Quasi-Newton method.

Key words: Quasi-Newton method, Nelder-Mead method, random censoring, gamma distribution, maximal likelihood estimation(MLE).

1. Introduction

Gamma distribution is widely used in various fields, including econometrics, insurance, medical research and reliability of engineering systems, where time to failure or lifetime needs to be analyzed. One of the features of data in these areas is the presence of censoring, that is, situations where observation of the lifetime is interrupted before the occurrence of the event of interest. This poses the challenge for researchers to adequately estimate the distribution parameters, despite the incompleteness of the data. The gamma distribution is determined by two parameters: shape α and scale β . These parameters control the shape of the distribution, which is important for modeling time to events. In the context of censored data, the main types of censoring are right, left, and interval. The most common type of censoring in applications is right censoring, in which the lifetime of an object exceeds the observation time.

To estimate the parameters of the gamma distribution under censoring conditions, the maximum likelihood method (MLE) is used, which is adapted to take into account the censored data. The effectiveness of MLE depends on the accuracy of the chosen model and the available data. One approach to parameter estimation is the use of the EM algorithm, which allows iterative parameter estimation, making optimal use of both censored and incomplete data. The main problem when working with censored data is the reduction in the effectiveness of statistical estimates due to the lack of complete information about the data. This can lead to bias and increased variance in parameter estimates. In addition, the choice of initial values and model specification has a significant impact on the convergence and accuracy of MLE results.

MLE is widely used due to its consistency and efficiency under general conditions. The likelihood function for censored data must be appropriately modified to account for the incomplete data, which typically involves the use of survival and hazard functions integral to the gamma distribution. The MLE for gamma parameters with censored data often requires numerical solutions, as the likelihood equations do not generally have closed-form solutions (Kalbfleisch and Prentice, 2002).[5]

The gamma distribution can be parameterized in terms of a shape parameter $\alpha = k$ and an inverse scale parameter $\beta = 1/\theta$, called a rate parameter. A random variable X that is gamma-distributed with shape α and rate β is denoted $X \sim \Gamma(\alpha, \beta) = \text{Gamma}(\alpha, \beta)$.

*Berdimuradov M. B. – National University of Uzbekistan, mirkamol1403@gmail.com

The corresponding probability density function in the shape-rate parameterization is

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$$

for $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

where $\Gamma(\alpha)$ is the gamma function; for all positive integers, $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$. The cumulative distribution function is the regularized gamma function:

$$F(x; \alpha, \beta) = \int_0^x f(u; \alpha, \beta) du = \frac{\gamma(\alpha, \beta x)}{\Gamma(\alpha)},$$

Where $\gamma(\alpha, \beta x)$ is the lower incomplete gamma function. Usually, when estimating unknown parameters using the MLE method, it is necessary to calculate the integral and derivatives of the cumulative distribution function $F(x)$. However, in some cases, due to the complexity of integration and derivation by the analytical method, numerical calculation in computer programs becomes necessary. In this thesis, the unknown parameters of the continuous Gamma distribution are estimated using numerical methods with random samples.

Let's denote the lifespan of the individual under study as X , with Cr representing the right-censorship time[1]. It's assumed that X is independent and follows a probability density function $f(x)$, along with a survival function $S(x)$, and a hazard function $h(x)$. The lifespan of an individual, X , is observed if it's less than or equal to Cr . However, if X exceeds Cr , the individual's survival status remains uncertain or is right-censored. Statistical inference, particularly parameter estimation, becomes essential in analyzing empirical data. Naturally, the estimation results are expected to be reliable, aiming to be unbiased and possess minimal variance. This paper will discuss the estimation results of Gamma distribution with type 1 right-censored data using numerical methods. These methods involve simulations employing the Maximum Likelihood Estimation technique, utilizing both the Quasi-Newton rule and the Nelder-Mead simplex algorithm. The simulation includes generating random sample data from both distributions with sample sizes of 100, 500, 1000, 1500 and 2000. The parameters used for the initial guess are obtained from example data of patients with lung cancer, specifically $\alpha = 2$, $\beta = 1$. To present some results obtained through numerical optimization using MATLAB for the Gamma distribution, Table 1 displays the findings.

2. Censoring.

Censoring occurs when the exact failure time of a certain item is unknown. There are two main types of censoring:

Right Censoring. When a unit's failure time is only known to exceed some value, it is said to be right censored. For example, reliability experiments only last for a finite amount of time and if a product has not failed by the end of the study time, it is right censored since its actual failure time is only known to be greater than the study time. Right censoring is the most common form of censoring, and is usually the result of limited resources or competing failure modes.

Left Censoring. In some situations, one knows only whether a unit failed after it was inspected once, revealing for instance a cracked covering or leaking hose. The unit may have failed in an engineering sense at one time but may not have been noticed until further

deterioration caused an inspection. In this case, one only knows that the failure occurred sometime prior to the inspection.

3. Likelihood construction and MLE for censored data

Suppose that we observe $X = (X_1, \dots, X_n)$ which are independent and identically distributed (iid) and have a continuous distribution with the probability density function (pdf) $f(x)$ and the cumulative distribution function (cdf) $F(x)$. Data from experiments involving random censoring can be conveniently represented by pairs (z_i, δ_i) with $z_i = \min(x_i, T_i)$:

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & \text{if } x_i > T_i \text{ censored} \\ 1, & \text{if } x_i \leq T_i \text{ uncensored} \end{cases}$$

for $i = 1, \dots, n$ where δ_i is a censoring indicator variable and T_i is a censoring time of test unit i . Denote the vector of unknown parameters by $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$. Then ignoring an normalizing constant, we have the complete-data likelihood

$$L^c(\theta|X) = \prod_{i=1}^n f(x_i).$$

Denote the observed (uncensored) part of x_1, \dots, x_n by $y = (y_1, \dots, y_m)$ and the missing (censored) part by $z = (z_{m+1}, \dots, z_n)$ with $z_i > T_i$. Integrating $L^c(\theta|X)$ with respect to z , we obtain the observed-data likelihood

$$\begin{aligned} L(\theta|y) &= \int L^c(\theta|y, z) dz = \prod_{i=1}^m f(y_i) \prod_{j=m+1}^n \int_{z_j > T_j} f(z_j) dz_j \\ &= \prod_{i=1}^m f(y_i) \prod_{j=m+1}^n [1 - F(T_j)]. \end{aligned}$$

Using the (z_i, δ_i) notation, we have

$$L(\theta|z, \delta) = \prod_{i=1}^n [f(X_i; \theta)]^{\delta_i} [1 - F(X_i; \theta)]^{1-\delta_i}, \quad (1)$$

where $z = (z_1, \dots, z_n)$ and $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$.

For Type -II censoring, the data consist of the r^{th} smallest lifetimes $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_r$ out of a sample of size n . Assuming that we observe $X = (x_1, \dots, x_n)$ which are iid and have a continuous distribution, it follows that the joint pdf of $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_r$ [3] is

$$\frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r f(x_i) \prod_{j=r+1}^n [1 - F(x_r)].$$

Ignoring an normalizing constant, we can rewrite the above equation in the form of (1) by setting $T_i = x_r$. Hence we can use (1) for the calculation of the MLE in both Type-I (including random censoring) and Type-II censoring.

The likelihood function (1) effectively combines uncensored and censored observations, in that if an individual is not censored, the probability of the event is $f(X_i)$, and if the individual

is censored at X_i , the probability of the event is $S(X_i) = 1 - F(X_i)$, the survivorship function evaluated at X_i . Taking the natural log of L , the objective is to maximize the expression.

$$\ln(L(Z^n; \theta)) = \sum_{i=1}^n \delta_i \ln f(X_i; \theta) + \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i) \ln(1 - F(X_i; \theta))$$

Or we can substitute variables like as follow $T_i = x_i$, with unknown parameter θ , usually survival function $S(x)$ is defined by cumulative distribution function (CDF) $F(x)$:

$$S(x) = P(X > x) = 1 - F(x),$$

$$\ln[L(X, \theta)] = \sum_{i=1}^n \delta_i \ln f(x_i, \theta) + \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i) \ln(1 - F(x_i, \theta))$$

where,

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{if } X_i \leq x_i \text{ uncensored} \\ 0, & \text{if } X_i > x_i \text{ censored} \end{cases}$$

To simplify computations, the log-likelihood function $l(X, \theta)$ is often used, as it converts products into sums.

$$l(X, \theta) = \ln[L(X, \theta)]$$

MLE seeks to find the parameter values that maximize the likelihood function. This is achieved by taking the derivative of the likelihood function with respect to the parameters, setting it equal to zero, and solving for the parameters.

$$\frac{\partial l(X, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

4. Analytical approach with MLE method for Gamma distribution

In the context of right-censored data, selecting an appropriate probability distribution is crucial for accurate parameter estimation. Common choices include the Gamma and Exponential distributions, both widely applied in survival analysis and reliability engineering. Let's consider the Gamma distribution and the case when $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{\lambda}$ for simplicity:

$$F(x; 1, \frac{1}{\lambda}) = \int_0^x \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{-x/\lambda} dx = \frac{1}{\lambda} \cdot (-\lambda) \cdot e^{-x/\lambda} \Big|_0^x = 1 - e^{-x/\lambda}.$$

For right-censored data, the likelihood function is derived by considering both the probability of observing the uncensored data and the probability of right-censored data. Let δ_i be the indicator variable for censorship $\delta_i = I(x_i < T_i)$. The likelihood function $L(\lambda, k|X, \delta)$ for a set of observations x_i and censorship indicators δ is given by:

$$L(\alpha, \beta|X, \delta) = \prod_{i=1}^n [f(x_i; \alpha, \beta)^{\delta_i} (1 - F(x_i; \alpha, \beta))^{1-\delta_i}].$$

Now, we can take the natural logarithm of the likelihood function:

$$\begin{aligned}
l(\lambda|X, \delta) &= \sum_{i=1}^n [\delta_i \ln f(x_i; \lambda) + (1 - \delta_i) \ln(1 - F(x_i; \lambda))] \\
l(\lambda|X, \delta) &= \sum_{i=1}^n \left(\delta_i \ln \left[\frac{1}{\lambda} e^{-x_i/\lambda} \right] + (1 - \delta_i) \ln [1 - (1 - e^{-x_i/\lambda})] \right) = \\
&= \sum_{i=1}^n \left(-\delta_i \cdot \ln \lambda - \delta_i \cdot \frac{x_i}{\lambda} - (1 - \delta_i) \cdot \frac{x_i}{\lambda} \right).
\end{aligned}$$

To maximizing the Log-Likelihood function we should calculate the partial derivatives of the log-likelihood with respect to the parameters $\alpha = 1$ and $\beta = \frac{1}{\lambda}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\lambda|X, \delta)}{\partial \lambda} &= 0; \\
\frac{\partial l(\lambda|X, \delta)}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\delta_i}{\lambda} + \delta_i \cdot \frac{x_i}{\lambda^2} + (1 - \delta_i) \cdot \frac{x_i}{\lambda^2} \right) = 0; \\
\sum_{i=1}^n \left(-\frac{\delta_i}{\lambda} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\delta_i \frac{x_i}{\lambda^2} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\lambda^2} - \sum_{i=1}^n \left(\delta_i \frac{x_i}{\lambda^2} \right) &= 0; \\
\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\lambda^2}; \\
\hat{\lambda}_{MLE} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n \delta_i};
\end{aligned}$$

when $\alpha = 1$:

$$\frac{\partial l(\lambda|X, \delta)}{\partial \alpha} = 0;$$

when $\alpha = 2, \beta = \beta$ we can find out CDF for Gamma function

$$\begin{aligned}
F(x; 2, \beta) &= \int_0^x \frac{x e^{-\beta x} \beta^2}{\Gamma(2)} dx = [\Gamma(n) = (n - 1)!, \Gamma(2) = 1] = \int_0^x x e^{-\beta x} \beta^2 dx = \\
&= \left[\begin{array}{l} \text{we take substitute with parts formula} \\ \int u dv = uv - \int v du \\ u = x, dv = e^{-\beta x} dx \\ du = dx, v = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \end{array} \right] = \beta^2 x \left(-\frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \right) \Big|_0^x + \beta^2 \int_0^x \frac{1}{\beta} e^{-\beta x} dx = \\
&= -\beta x e^{-\beta x} + \beta \left(-\frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \right) \Big|_0^x = 1 - e^{-\beta x} (\beta x + 1).
\end{aligned}$$

Now, we can find the natural logarithm of the likelihood function and estimation with respect to β on MLE method:

$$l(\beta|X, \delta) = \sum_{i=1}^n [\delta_i \ln f(x_i; \beta) + (1 - \delta_i) \ln(1 - F(x_i; \beta))]$$

$$\begin{aligned}
l(\beta|X, \delta) &= \sum_{i=1}^n (\delta_i \ln [x e^{-x\beta} \beta^2] + (1 - \delta_i) \ln [1 - (1 - e^{-\beta x}(\beta x + 1))]) = \\
&= \sum_{i=1}^n (\delta_i \ln x_i - \delta_i x_i \beta^3 - (1 - \delta_i) \beta x_i + \ln \beta x_i - \delta_i \ln \beta x_i) = \\
&= \sum_{i=1}^n (-\delta_i x_i \beta^3 - \beta x_i + \beta x_i \delta_i + \ln \beta x_i - \delta_i \ln \beta).
\end{aligned}$$

To maximizing the Log-Likelihood function we should calculate the partial derivatives of the log-likelihood with respect to the parameters $\alpha = 2$ and β

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\beta|X, \delta)}{\partial \beta} &= 0 \\
\frac{\partial l(\beta|X, \delta)}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n \left(-3\beta^2 \delta_i x_i - x_i + x_i \delta_i + \frac{x_i}{\beta x_i} - \frac{\delta_i}{\beta} \right) = 0 \\
&= \sum_{i=1}^n (-3\beta^3 \delta_i x_i - \beta x_i (1 - \delta_i) + 1 - \delta_i) = 0
\end{aligned}$$

To solve a general cubic equation of the form $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, we can follow these general steps:

a) Normalize the cubic equation: Divide the entire equation by a to normalize the leading coefficient to 1:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

b) Depressed cubic: we can use a substitution to remove the x^2 term. Set $x = y - \frac{b}{3a}$, which gives a "depressed cubic" in the form:

$$y^3 + py + q = 0 \text{ where } p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \text{ and } q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}.$$

c) solution of the depressed cubic: Now we can apply Cardano's formula, which states that the depressed cubic has at least one real root given by:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}}$$

d) Check for multiple roots: If $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3$ is zero, the cubic has a multiple root, and the formula simplifies.

e) Back substitution: Once we find y , substitute back $x = y - \frac{b}{3a}$ to get the original variable.

f) Find all roots: If we need the other two roots (since a cubic has three roots in total, counting multiplicities), we can use polynomial division to reduce the cubic to a quadratic once one root is known and then apply the quadratic formula.

g) Consider complex roots: If the discriminant $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3$ is negative, the cubic equation has one real root and two complex conjugate roots. The complex roots can also be found using trigonometric or hyperbolic functions in Cardano's formula.

As we mentioned above for various values of α and β , it is common to employ numerical techniques or dedicated software tools (including mathematical software or programming libraries like Python, MATLAB, or R) to execute the integration process and derive the Cumulative Distribution Function (CDF).

To estimate the unknown parameters of a distribution, we use two methods: Newton-Raphson and Nelder-Mead in MATLAB. We then compare their estimated results in a table and graph.

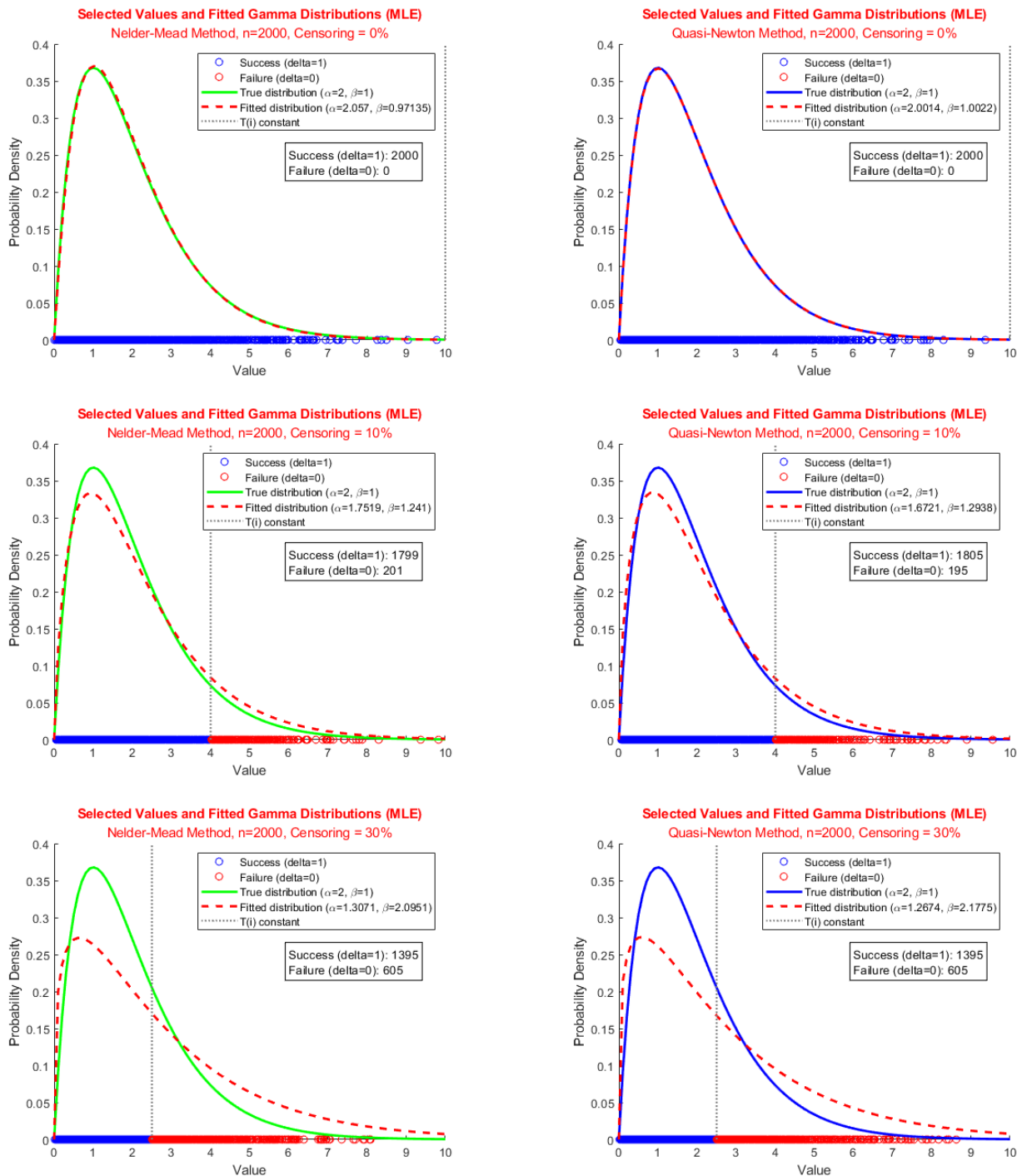
As mentioned above, we can compare numerical values obtained using two methods for estimating the unknown parameters of the Gamma distribution in MATLAB, both in a table 1 and graphically.

Table 1: Results of the estimated unknown parameters of the Gamma distribution in MATLAB.

n	Censoring level, Constant T_i , $T_i \in [0,10]$	$p\%$	Gamma Distribution	
			Initial Guess $\alpha = 2; \beta = 1$	
			MLE by Quasi-Newton rule	MLE by Nelder-Mead rule
100	10	0	$\alpha = 1.928; \beta = 1.106$	$\alpha = 1.906; \beta = 1.107$
	4	10	$\alpha = 1.848; \beta = 1.218$	$\alpha = 2.121; \beta = 1.210$
	2.5	30	$\alpha = 1.359; \beta = 2.107$	$\alpha = 1.380; \beta = 2.056$
	2	50	$\alpha = 1.125; \beta = 3.185$	$\alpha = 1.129; \beta = 2.984$
500	10	0	$\alpha = 2.082; \beta = 0.971$	$\alpha = 2.095; \beta = 1.110$
	4	10	$\alpha = 1.896; \beta = 1.108$	$\alpha = 2.102; \beta = 0.969$
	2.5	30	$\alpha = 1.384; \beta = 1.999$	$\alpha = 1.395; \beta = 1.910$
	2	50	$\alpha = 1.113; \beta = 3.003$	$\alpha = 1.101; \beta = 2.659$
1000	10	0	$\alpha = 2.016; \beta = 0.991$	$\alpha = 1.98; \beta = 0.987$
	4	10	$\alpha = 1.895; \beta = 1.303$	$\alpha = 2.201; \beta = 1.205$
	2.5	30	$\alpha = 1.332; \beta = 2.187$	$\alpha = 1.391; \beta = 1.992$
	2	50	$\alpha = 1.101; \beta = 2.945$	$\alpha = 1.109; \beta = 2.730$
1500	10	0	$\alpha = 2.013; \beta = 0.995$	$\alpha = 1.985; \beta = 1.012$
	4	10	$\alpha = 1.899; \beta = 1.319$	$\alpha = 1.908; \beta = 1.328$
	2.5	30	$\alpha = 1.383; \beta = 2.002$	$\alpha = 1.398; \beta = 1.976$
	2	50	$\alpha = 1.112; \beta = 3.00$	$\alpha = 1.154; \beta = 2.943$
2000	10	0	$\alpha = 1.9992; \beta = 1.016$	$\alpha = 2.002; \beta = 1.0085$
	4	10	$\alpha = 1.831; \beta = 1.115$	$\alpha = 1.847; \beta = 1.189$
	2.5	30	$\alpha = 1.381; \beta = 1.969$	$\alpha = 1.317; \beta = 1.529$
	2	50	$\alpha = 1.126; \beta = 3.103$	$\alpha = 1.113; \beta = 2.936$

* Note: The sample data, n , is simulated randomly. Therefore, if the code is executed, it may display different results compared to those presented in Table 1.

Graphics: Some graphics for comparing the results we obtained in Table 1



5. Conclusion

Based on the simulation results of the two estimation methods, it is evident that parameter estimation using the Quasi-Newton rule outperforms the Nelder-Mead simplex algorithm when in an uncensored state. This is indicated by the smaller bias and the tendency of the Quasi-Newton values to converge closer to the actual parameter value as the sample size increases when in a censored state.

REFERENCES

1. Lee, E., Wang, J.W. (2003). Statistical Method for Survival Data Analysis. John Wiley Sons Inc., New York.
2. Cordeiro, G.M., Castellares, F., Montenegro, L.C., Casto, M. (2012). The Beta Generalization of The Gamma Distribution. *Statistics*, 47, 1-13.
3. H. A. David. Order Statistics. John Wiley Sons, New York, 1981.
4. Nelder-Mead User's Manual, Michael Baudin April 2010, 119 page
5. Kalbfleisch, J.D., Prentice, R.L. (2002). The Statistical Analysis of Failure Time Data. John Wiley Sons.
6. Escobar, Luis A and Meeker. William Q Statistical Methods for Reliability Data, Wiley Sons: New York, NY. 1998.
7. Smith, Peter J. Analysis of Failure and Survival Data, Chapman and Hall: Boca Raton, FL. 2002.
8. C. T. Kelley, Detection and Remediation of Stagnation in the Nelder-Mead Algorithm Using a Sufficient Decrease Condition, Technical report, Department of Mathematics, North Carolina State University, Raleigh, NC, 1997.
9. J. C. Lagarias, B. Poonen, and M. H. Wright, Convergence of the restricted Nelder-Mead algorithm in two dimensions, in preparation, 1998.
10. Agarwal, S.K. Kalla. S.L. (1996). A generalized gamma distribution and its application in reliability. *Communication in Statistics Theory-Methods*, 25, 201- 210.
11. Agarwal, S.K. Al-Saleh, A.A. (2001). Generalized gamma type distribution and its hazard rate function. *Communication in Statistics Theory-Methods*, 30, 309-318.
12. Bain, L.J. Engelhardt, M. 1992. Introduction to Probability and Mathematical Statistics. Duxbury, United States.
13. Cordeiro, G.M., Castellares, F., Montenegro, L.C., Casto, M. (2012). The Beta Generalization of The Gamma Distribution. *Statistics*, 47, 1-13.
14. Cox, C., Chu, H., Schneider, M.F., Munoz, A. (2007). Parametric survival analysis and taxonomy of hazard functions for the generalized gamma distribution. *Statistics in Medicine*, 26.
15. Hogg, R.V., Craig, A.T. (1995). Introduction of Mathematical Statistic. Fifth Edition. John Wiley Sons, The United States of America.
16. Hogg, V.H., Mckean, J.W., Craig, A.T. (2013). Introduction to Mathematical Statistics. Pearson Education Inc., Boston.

17. Kalla, S.L. Al-Saqabi, B.N., Khajah, H.G. 2001. A unified form of gamma type distributions. Applied Mathematics and Computation, 118, 175-187.

REZYUME

Ushbu ishda kuzatuvlar senzuralangan holatlarda gamma taqsimotining parametrlarini baholash ko'rib chiqiladi. Maksimal o'xshashlik usuli hamda MATLAB dasturiy vositasi yordamida, Kvazi-Nyuton va Nelder-Mid usullari kabi raqamli optimallashtirish usullaridan foydalanib, MLE baholari topiladi.

Kalit so'zlar: Kvazi-Nyuton usuli, Nelder-Mid usuli, tasodifiy senzurlash, gamma taqsimoti, maksimal o'xshashlik bahosi.

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматривается оценка параметров гамма-распределения в случае цензурированных наблюдений. Для нахождения оценок методом максимального правдоподобия используется метод максимального правдоподобия, а также программный инструмент MATLAB для выполнения численной оптимизации с использованием методов, таких как метод Квазиньютоновской оптимизации и метод Нелдера-Мида.

Ключевые слова: Квазиньютоновский метод, Метод Нелдера-Мида, случайный цензурирование, гамма-распределение, метод максимального правдоподобия.

UDC 517.98

BIR KVADRATIK NOSTOXASTIK OPERATORNING BA'ZI XARAKTERISTIKALARI HAQIDA

Ergashov O. H. *

REZYUME

So'nggi yillarda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tadbiqiga ega bo'lgan statistik fizika, biologiya va geologiyaning dolzarb yo'nalishlariga e'tibor qaratilmoqda. Nochiziqli dinamik sistemalar biologiya, fizika va boshqa sohalarning ko'pgina masalalarini hal qilishda qo'llaniladi [1-15]. Xususan, kvadratik dinamik sistemalar turli tabiatli population modellarni o'rganishda ishlatiladi, bunday modellar H. Kesten, Yu.I. Lyubich va U.A. Rozikovlarning ishlarida keltirilgan. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-son "O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha Harakatlar strategiyasi to'g'risida"gi Farmonini bajarilishida ma'lim bir ma'noda xizmat qiladi. Maqolada kvadratik nostoxastik operator haqida ma'lumotlar keltirilgan hamda ikki o'lchovli kvadratik nostoxastik operatorga misol keltirilib uning qo'zg'almas nuqtalari hamda invariant to'plamlari o'rganilgan.

Kalit so'zlar: simpleks, uzluksiz akslantirish, yakobi matritsasi, kvadratik nostoxastik operator, qo'zg'almas nuqta, invariant to'plam.

Nochiziqli dinamik sistemalar biologiya, fizika va boshqa sohalarning ko'pgina masalalarini hal qilishda qo'llaniladi [1-15]. Xususan, kvadratik dinamik sistemalar turli tabiatli populyatsion modellarni o'rganishda ishlatiladi, bunday modellar H. Kesten, Yu.I. Lyubich va U.A. Rozikovlarning ishlarida keltirilgan. Ko'plab amaliy ishlar aksariyat hollarda stoxastik va nostoxastik kubik matritsalar orqali aniqlangan evolyutsion operatorlar dinamikasini aniqlashda samarali qo'llanilmoqda. Kubik matritsalarining vaqtga bog'liq oilasi biologiya va fizika masalalarining matematik modelini ifodalashda foydalaniladi. Shu sababli kubik matritsalar yordamida qurilgan operatorlar va simpleksni saqlovchi stoxastik va nostoxastik kubik matritsalar yordamida qurilgan nochiziqli operatorlar dinamikasi muhim masalalaridan biri bo'lib qolmoqda. Dunyoda xaotik dinamik sistema hosil qiluvchi stoxastik va nostoxastik kvadratik operatorlar hamda kvadratik nostoxastik operatorlar hosil qilgan dinamik sistemalarni aniqlashga doir ilmiy izlanishlar olib borilmoqda.

Aytaylik, $I = \{1, 2, \dots, m\}$ bo'lib, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ - I to'plamning ehtimollik taqsimoti ya'ni

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m; x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\} \quad (1)$$

$m - 1$ o'lchovli simpleks elementi bo'lsin.

Kvadratik stoxastik operator deb, S^{m-1} simpleksni o'zini-o'ziga akslantiruvchi quyidagi akslantirishga aytiladi:

$$V : x'_k = \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2)$$

*Ergashov O. H. – Buxoro davlat universiteti, ergashovoh@mail.ru

bu yerda $P_{ij,k}$ koeffitsiyentlar

$$P_{ij,k} \geq 0, \quad P_{ij,k} = P_{ji,k}, \quad \sum_{k=1}^m P_{ij,k} = 1, \quad i, j, k = 1, \dots, m. \quad (3)$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Har bir (3) shart bilan aniqlangan kvadratik stoxastik operator V biror $\mathbb{P} = (P_{ij,k})_{i,j,k=1}^m$ kubik matritsa yordamida bir qiymatli aniqlanadi.

(2) ko'rinishida aniqlangan kvadratik stoxastik operator ta'sirida $x^{(0)} \in S^{m-1}$ boshlang'ich nuqtaning trayektoriyasi (orbitasi) $x^{(n)}$ quyidagicha aniqlanadi: $x^{(n+1)} = V(x^{(n)})$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Aytaylik, f biror bir X topologik fazoda aniqlangan uzluksiz akslantirish bo'lsin. Ushbu $f(x) = x$ tenglikni qanoatlantiruvchi $x \in X$ nuqtaga f akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi. $f^m(x) = x$ tenglikni qanoatlantiruvchi $x \in X$ nuqtaga f akslantirish uchun m davriy nuqta deyiladi. $f^m(x) = x$ tenglikni qanoatlantiruvchi eng kichik m soniga f akslantirishning tub davri deyiladi. Ushbu

$$J_V(x_1, x_2, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x'_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x'_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x'_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

matritsa V operatorning yakobi matritsasi deb ataladi.

Ta'rif 1. [1] Agar x^* qo'zg'almas nuqtada V operator yakobiani $J(x^*)$ birlik aylanada xos qiymatga ega bo'lmasa, x^* nuqta giperbolik qo'zg'almas nuqta deyiladi.

Ta'rif 2. [1] x^* giperbolik qo'zg'almas nuqta bo'lsin:

- i) Agar $J(x^*)$ yakobi matritsasining barcha xos qiymatlari moduli birdan kichik bo'lsa, x^* qo'zg'almas nuqta tortuvchi deyiladi,
- ii) Agar $J(x^*)$ yakobi matritsasining barcha xos qiymatlari moduli birdan katta bo'lsa, x^* qo'zg'almas nuqta itaruvchi deyiladi,
- iii) Qolgan barcha hollarda x^* qo'zg'almas nuqtaga egar deyiladi.

Ta'rif 3. [3] S^{m-1} simpleksni saqlovchi (2) kvadratik stoxastik operatorning hech bo'lmaganda bitta $P_{ij,k}$, $i \neq j$ koeffitsiyenti manfiy bo'lsa, bu operatorga nostoxastik kvadratik operator deyiladi.

Teorema 1. [3] (2) tenglik bilan aniqlangan V kvadratik operator S^{m-1} simpleksni saqlashi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi yetarli

- i) $\sum_{k=1}^m P_{ij,k} = 1, \quad i, j = 1, \dots, m;$
- ii) $0 \leq P_{ii,k} \leq 1, \quad i, k = 1, \dots, m;$
- iii) $-\frac{1}{m-1} \sqrt{P_{ii,k} P_{jj,k}} \leq P_{ij,k} \leq 1 + \sqrt{(1 - P_{ii,k})(1 - P_{jj,k})}$
hamda (i), (ii) va (iii') shartlarning
- iii') $-\sqrt{P_{ii,k} P_{jj,k}} \leq P_{ij,k} \leq 1 + \sqrt{(1 - P_{ii,k})(1 - P_{jj,k})}$

bajarilishi zarur.

Aytaylik, f biror bir X fazoda aniqlangan funksiya bo'lsin [1]. $f^n(x)$ ni f funksiyani x elementga n marta ketma-ket ta'sir qilishini tushunamiz. A to'plam X fazoning biror qism to'plami bo'lsin, u holda $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ bo'ladi.

Quyidagi ikki o'lchovli kvadratik nostoxastik operatorni qaraymiz:

$$V : \begin{cases} x' = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \\ y' = 3xy + 2yz \\ z' = 3xz + yz. \end{cases} \quad (4)$$

Yuqoridagi teoremdan ko'rinib turibdiki, bu operator kvadratik nostoxastik operator bo'lib, S^2 simpleksni o'zini o'ziga akslantiradi. Endi ushbu operatorning qo'zg'almas nuqtalarini topamiz

$$\begin{cases} x = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \\ y = 3xy + 2yz \\ z = 3xz + yz. \end{cases} \quad (5)$$

Bu (5) sistemani quyidagicha yozib olamiz

$$\begin{cases} x = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \\ y(1 - 3x - 2z) = 0 \\ z(1 - 3x - z) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

(6) sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalari simmetrik ekanligidan uning qo'zg'almas nuqtalarini topish qiyinchilik tug'dirmaydi, ya'ni uning qo'zg'almas nuqtalari quyidagi nuqtalardan ibor ekanligini topamiz.

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (1/3, 0, 2/3), \quad e_3 = (1/3, 2/3, 0), \quad e_4 = (1/7, 4/7, 2/7)$$

Endi (6) ko'rinishda aniqlangan kvadratik nostoxastik operatorni qo'zg'almas nuqtalarini tipini aniqlaymiz. Dastavval (6) ko'rinishda aniqlangan kvadratik nostoxastik operatorni uch noma'lumdan ikki noma'lumga tushurib olamiz, ya'ni ikkinchi va uchinchi tenglamalarning x o'zgaruvchisi o'rniga $x = 1 - y - z$ ifodani qo'yamiz. Natijada bizga ikki noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi va uni W orqali belgilab olamiz.

$$W : \begin{cases} y' = 3xy + 2yz = y(3 - 3y - z) \\ z' = 3xz + yz = z(3 - 2y - 3z). \end{cases} \quad (7)$$

(7) ko'rinishda aniqlangan W operator $G = \{(y, z) \in [0, 1]^2 : y + z \leq 1\}$ to'plamda aniqlangan. Bu kvadratik nostoxastik operatorning yakobi matritsasi quyidagicha bo'ladi.

$$J_W(y, z) = \begin{pmatrix} 3 - 6y + z & -y \\ -2z & 3 - 2y - 6z \end{pmatrix}$$

Endi (7) ko‘rinishda aniqlangan W kvadratik nostoxastik operatorning qo‘zg‘almas nuqtalarning tipini aniqlaymiz. Buning uchun

$$\det|J_W(y, z) - \lambda E| = 0,$$

bu yerda E birlik matritsa. Har bir e_i , $i = 1, 2, 3, 4$ uchun $\det|J_W(y_i, z_i) - \lambda E| = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi λ sonlarni topamiz. Sodda hisoblashlar yordamida quyidagi natijalarni hosil qilamiz:

e_1 qo‘zg‘almas nuqta uchun, $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$,

e_2 qo‘zg‘almas nuqta uchun, $\lambda_1 = 2\frac{1}{3}$, $\lambda_2 = -1$,

e_3 qo‘zg‘almas nuqta uchun, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1\frac{2}{3}$,

e_4 qo‘zg‘almas nuqta uchun, $\lambda_1 = \frac{3}{7}$, $\lambda_2 = -\frac{5}{7}$.

Tasdiq. e_1 qo‘zg‘almas nuqta itaruvchi, e_2 va e_3 qo‘zg‘almas nuqtalar giperbolik emas (ammo yarim-itaruvchi), e_4 qo‘zg‘almas nuqtalar tortuvchi.

Invariant to‘plamlari: Berilgan operatorning ikkinchi tenglamasidan $x = \frac{1+2z}{3}$ ni, uchinchi tenglamasidan esa $x = \frac{1+y}{3}$ tenglikni hosil qilamiz. Bu ikkita tenglikdan esa quyidagi tenglikni hosil qilamiz $z = \frac{1}{2}y$.

1-rasmdan invariant to‘plamlarni geometrik tasviri tasvirlangan. Quyidagi to‘plamlarni qaraylik.

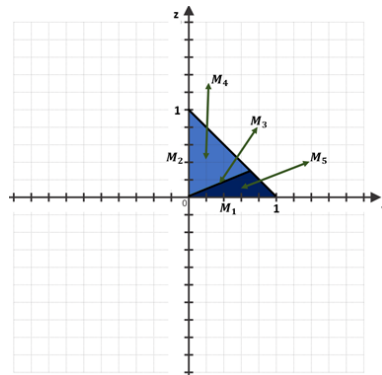
$$M_1 = \{(y, z) \in G : z = 0\},$$

$$M_2 = \{(y, z) \in G : y = 0\},$$

$$M_3 = \{(y, z) \in G : z = \frac{1}{2}y\},$$

$$M_4 = \{(y, z) \in G : z > \frac{1}{2}y\},$$

$$M_5 = \{(y, z) \in G : z < \frac{1}{2}y\}.$$



1-rasm. W operatorning invariant to‘plamlari

Lemma 1. (7) ko‘rinishda aniqlangan W operator uchun $M_i, i = 1, \dots, 5$ to‘plamlar invariant to‘plamlar bo‘ladi.

Isbot: $i = 1, 2$ uchun $W(M_i) \subset M_i$ ekanligini ko'rish oson. i ning 3, 4, 5 qiymatlari uchun $(y, z) \in M_i$ deb faraz qilsak, u holda $(y', z') = W(y, z) \in M_i$ ekanligini ko'ramiz. (7) operatorning birinchi va ikkinchi tenglamalaridan

$$yz = 1/2(y' - 3xy), yz = z' - 3xz$$

bu ikki tenglikdan esa

$$1/2(y' - 3xy) = z' - 3xz$$

bundan

$$y' - 2z' = 3x(y - 2z). \quad (8)$$

(8)-tenglikdan ko'rinadiki, $y' - 2z' = 0$ va $y - 2z = 0$ ekanligidan M_3 to'plam W operator uchun invariant to'plam ekanligini ko'rish mumkin. (8) tengmada $x = 0$ ekanligidan $y' - 2z' = 0$ bu (y, z) va $y + z = 1$ har qanday qiymatida qanoatlantiradi va operatorning birinchi ta'siridan so'ng nuqta M_3 invariant to'plamga tegishli bo'ladi.

(8) dan kelib chiqadiki, agar $x = 0$, $x = 1$ bo'lsa, birinchi ta'siridan so'ng $y + z = 1$ (ya'ni $x = 0$) bo'lgan har qanday (y, z) nuqta M_3 invariantga tegishli bo'ladi. Shuning uchun ham biz $x \geq 0$ bo'lgan holini qaraymiz, u holda (8) dan

$$\begin{aligned} y' - 2z' > 0 &\leftrightarrow y - 2z > 0 \\ y' - 2z' < 0 &\leftrightarrow y - 2z < 0. \end{aligned}$$

Bundan esa M_4 va M_5 to'plamlar berilgan operator uchun invariant to'plamlar ekanligi kelib chiqadi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$\hat{T}_i = \{(x, y, z) \in S^2 : (y, z) \in M_i\}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$S^2 = \bigcup_{i=1}^5 \hat{T}_i.$$

Lemma 2. *Har bir $i = 1, 2, 3, 4, 5$ da $\hat{T}_i = \bigcup_{i=1}^5 M_i$ to'plam V operatorning invariant to'plami bo'ladi.*

ADABIYOTLAR

1. Devaney R. L. An introduction to chaotic dynamical system, Westview Press, 2003.
2. Casas J. M., Ladra M., Rozikov U.A. Markov processes of cubic stochastic matrices: Quadratic stochastic processes. Linear Algebra Appl. 575 (2019), 273-298.
3. Rozikov U.A, Xudayarov S.S. Quadratic non-stochastic operators: examples of splitted chaos // Annals of Functional Analysis. 13:17 (2022).1-17.
4. Ganikhodzhaev R.N., Mukhamedov F.M., Rozikov U.A., *Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems*, Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Rel. Fields 14(2) (2011) 279-335.

5. Ganikhodzhaev R.N., *Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments*, Acad. Sci. Sb. Math. 76(1993) 489–506.
6. Rozikov U.A., Shoyimardonov S.K., *Ocean ecosystem discrete time dynamics generated by l -Volterra operators*, Int. J. Biomath. 12(2) (2019), 1950015, 24
7. Rozikov U.A., Zhamilov U. U., *Volterra quadratic stochastic operators of a two-sex population*, Ukrainian Math. J.(63)(7) (2011), 1136-1153.
8. Ganikhodzhaev R.N., *A family of quadratic stochastic operators that act in S^2* , Dokl. Akad. Nauk UzSSR 1(1989) 3–5, in Russian.
9. Hardin A.J.M., Rozikov U.A., *A quasi-strictly non-Volterra quadratic stochastic operator*, Qual. Theory Dyn. Syst. 18(3) (2019), 1013-1029.
10. Lyubich Yu.I., *Mathematical structures in population genetics*, Springer-Verlag, 1992.
11. Maksimov V.M., *Cubic stochastic matrices and their probability interpretations*, Theory Probab. Appl, 41(1) (1996) 55-69.
12. Kesten H., *Quadratic transformations: a model for population growth*, I, II, Adv. Appl. Probab, 2 (1970) 1-82; 179-228.
13. Ladra M., Rozikov U.A., *Algebras of cubic matrices*, Linear Multilinear Algebra 65(7) (2017) 1316-1328.
14. Sarymsakov A.T., *Quadratic transformations that preserve a simplex*, (Russian)Izv. Akad. Nauk UzSSR Ser. Fiz.-Mat. Nauk. 2 (1982) 16-19.
15. Sarymsakov A.T., *Behaviour of trajectories and ergodic properties of the quadratic stochastic operators*, PhD thesis, 1982. Tashkent.

РЕЗЮМЕ

В последние годы внимание уделяется современным направлениям статистической физики, биологии и геологии, имеющим научное и практическое применение фундаментальных наук. Нелинейные динамические системы используются для решения многих задач биологии, физики и других областей [1-15]. В частности, квадратичные динамические системы используются при исследовании популяционных моделей различной природы, такие модели были разработаны Х. Кестеном, Ю.И. Любичем и Ю.А. Упомянуты в трудах Розиковых. Указ Президента Республики Узбекистан от 7 февраля 2017 года № ПФ-4947 "О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан" служит в одном смысле. В статье приведены сведения о квадратичном нестохастическом операторе и приведен пример двумерного квадратичного нестохастического оператора, исследованы его неподвижные точки и инвариантные подмножества.

Ключевые слова: симплекс, непрерывное отражение, матрица Якоби, квадратичный нестохастический оператор, неподвижная точка, инвариантные подмножества.

RESUME

In recent years, attention has been paid to modern areas of statistical physics, biology and geology, which have scientific and practical application of fundamental sciences. Nonlinear dynamic systems are used to solve many problems in biology, physics and other fields [1-15]. In particular, quadratic dynamic systems are used in the study of population models of various natures; such models were developed by H. Kesten, Yu.I. Lyubich and Yu.A. Izrael. Mentioned in the works of the Rozikovs. Decree of the President of the Republic of Uzbekistan dated February 7, 2017 No. PF-4947 "On the strategy of action for the further development of the Republic of Uzbekistan" serves in one sense. The article provides information about the quadratic non-stochastic operator and gives an example of a two-dimensional quadratic non-stochastic operator; its fixed points and invariant sets are studied.

Key words: simplex, continuous reflection, Jacobian matrix, quadratic nonstochastic operator, fixed point, invariant sets.

UDC 517.95

NEURAL NETWORKS WITH MULTIDIMENSIONAL WEIGHT CONNECTIONS IN REGRESSION PROBLEMS**Khudaybergenov K. K. *****RESUME**

Research in cognitive science indicates that the exchange of information among biological neurons relies on neurotransmitters, which facilitate the transmission of signals between neurons. Through the release of distinct neurotransmitters, a neuron communicates information to another neuron, with each neurotransmitter serving a unique function. In accordance with the biological perspective, a novel artificial neural network model is suggested that augments the quantity of synaptic weights connecting pairs of neurons. This new model is predicated on the concept that multiple synapses exist between each neural connection, as observed in biological systems in the human brain. The cumulative total of the binding weights reflects the aggregate of the neurotransmitter category, with individual components of the weights corresponding to distinct neurotransmitters. Inputs and outputs are selected using a heuristic approach for each connection in the envisioned model to ensure effective competition among the neurotransmitters. From this conclusion, the suggested artificial neural network models can be modeled as mathematical representations that closely mirror the operations of biological neural networks. Regarding the architectural composition of emerging models, the utilization of multiple filters in determining the activation of each hidden neuron has the potential to enhance the elucidation of the features acquired by the neural network.

Key words: Biological neuron, artificial neuron, neural network, neurotransmitter, connection, regression problem.

Introduction

Studies in neurobiology have demonstrated the development of diverse artificial neural network architectures, such as feedforward neural networks, recurrent neural networks, deep belief networks [1], Deep Boltzmann machines [2], deep autoencoders [3], convolutional neural networks [4-8], and additional models. Consequently, it became feasible to address issues pertaining to artificial intelligence, including visual object recognition, point identification, and natural language understanding. All currently known artificial neural networks share the characteristic that information transfer between two neurons relies on a singular weighted connection.

The multilayer neural network stands out as a valuable artificial neural network for discerning the functional organization within tasks related to pattern recognition and classification. Scholars in the field of artificial neural networks have put forth and tested numerous types of neural network models that leverage multi-layered structures, such as convolutional neural networks [9], deep neural networks [10], fuzzy MLP [11], and others.

***Khudaybergenov K. K.** – Kimyo International University in Tashkent, kabul85@mail.ru

To attain the precision demonstrated in the computations, the selection of the artificial neural network architecture hinges on determining the optimal count of hidden neurons and layers within the network. The utilization of specific activation functions in artificial neural networks combined with a higher quantity of hidden layers results in the occurrence of the vanishing gradient issue. Indicators demonstrating the non-uniform distribution of errors may vary significantly, encompassing very minute values as well as notably large magnitudes. In order to address the issue at hand, a specialized type of recurrent neural network known as a short-term memory network was designed. According to the findings of Kurkova V. [12], it was demonstrated that a neural network with two hidden layers and a one-dimensional infinitely differentiable sigmoidal activation function can effectively approximate any given continuous function. Nevertheless, based on this assertion, it can be observed that the quantity of neurons in the concealed layer needed for approximation is excessively high.

V. Mairov and A. Pinkus [13] were one of the pioneering researchers to introduce a criteria for determining the optimal number of neurons in the hidden layer of traditional artificial neural networks. They demonstrated the presence of a neural network comprising two hidden layers utilizing a sigmoidal activation function in the process of approximating a complex multidimensional function. Later, by V. Ismailov [14] achieved superior outcomes when addressing the regression problem within appropriate propagating neural networks. Moreover, the theory and practice of artificial intelligence have benefited greatly from the substantial contributions made by international scientists.

Description of the proposed architecture

The communication between neurons is facilitated through chemical synapses from a biological perspective. Neurotransmitters are released from the axon of a specific biological neuron into a synaptic cleft, where they are subsequently received by the following biological neuron postsynaptically. In the context of computer science, an artificial neuron may be conceptualized as a mathematical model of a biological neuron, with the connecting weight serving as a synaptic link facilitating information transmission between the two neurons.

Studies conducted in the fields of biology and cognitive science have demonstrated the presence of more than 200 different types of biological neurotransmitters. They can be categorized into three groups based on a biological perspective: amino acids, peptides, and monoamines. To date, the prevailing understanding was that a biological neuron exclusively transports a single type of neurotransmitter. Nevertheless, contemporary studies in this field demonstrate the presence of alternative neuronal subtypes that store and convey a variety of neurotransmitters [15,16]. Presently, a variety of distinct peptides can be found within a single terminal.

The contemporary artificial neural network architecture is founded on arrays of interconnected units that imitate the functionality of neurons at the biological level of the human brain. The cognitive process involves the comparison of individual neurons within each unit, examining the synaptic weight - the weight coefficient of connection - between interconnected nodes. This synaptic weight serves to transmit signals between units, thereby delineating the comprehensive biological synapse between the interconnected neurons. The association strength among two units is treated as a scalar quantity and represents a synaptic connection or the complete range of neurotransmitter types present. At a biological level, it is hypothesized that various neurotransmitters exhibit diverse functionalities, thereby

necessitating an expansion in the magnitude of synaptic weights connecting neurons. This phenomenon arises from the capability to incorporate weights representing coefficients ranging from one-dimensional scalar quantities to multidimensional vectors connecting two neurons. This approach to linking units was derivatively derived in an effort to emulate the neural signal coordination observed between various biological-level neurotransmitters. In light of the methodology applied, it can be argued that the transmission mechanism of the newly suggested artificial neural network aligns more closely with the signaling mechanisms observed in biological networks as compared to traditional artificial neural network models. Hence, our newly proposed artificial neural network model holds the potential to surpass conventional artificial neural network models across various dimensions.

The model structure multidimensional MCNN and main result

This section delineates the architecture of the proposed multidimensional connection weight neural network (MCNN) designed for addressing face classification tasks.

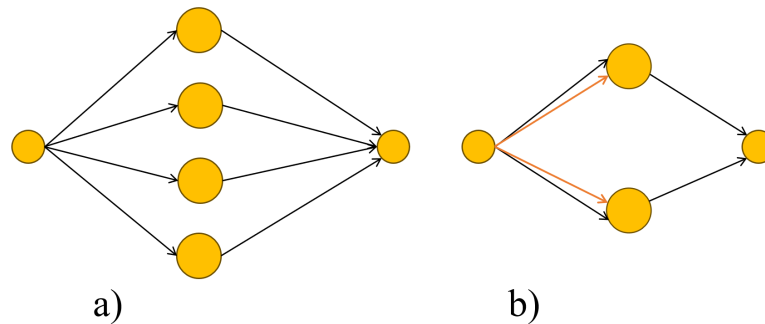


Рис. 1: (a) Model structure of NN-1-L₁4-1. (b) Model structure of MCNN-1-L₁-2H₂-1.

Let's examine a feedforward neural network consisting of 3 hidden layers. The architectural configuration of the conventional neural network and the newly introduced MCNN model are illustrated in Fig. 2. Firstly, we simplify the analysis by considering a model of multidimensional connection weight neural networks with two-dimensional weights.

Fundamentally, our findings stem from the approximation characteristic of the MNN as expounded in the referenced literature [17]. Multilayer neural networks exhibit the capability to approximate any continuous function over a compact subset of with a designated level of precision to provide an accurate representation. They demonstrated that any continuous function can be effectively approximated to a desired degree of precision using a neural network featuring multiple connection weights and employing a chosen activation function.

In this context, we extrapolate the aforementioned approximation characteristics to the newly introduced MCNN model. Specifically, we develop Artificial Neural Networks (ANN) with multiple connection weights (referred to as MCNN) to address regression, classification, and pattern recognition challenges. Our study demonstrates that the introduced MCNN architecture, utilizing a sigmoidal function that is infinitely differentiable, is capable of effectively handling tasks related to regression, classification, and pattern recognition with high precision levels.

Theorem 1. Let $\sigma(z_1, \dots, z_H) = 1/(1 + \sum_{h=1}^H e^{-\alpha z_h})$, $z_h \in R$, $h = 1, \dots, H$, which is the number of dimensions of weight connections of MCNN are extended to, and let is compact. Then for any $f \in C(\mathbf{x}), \varepsilon > 0$, $H \in N$, there exist $w_{i,j}^{(1)}, b_{i,j}^{(1)}, w_{i,j}^{(2)}, b_{i,j}^{(2)}, \dots, w_{i,j}^{(H)}, b_{i,j}^{(H)}, w_i, \alpha \in R$ for

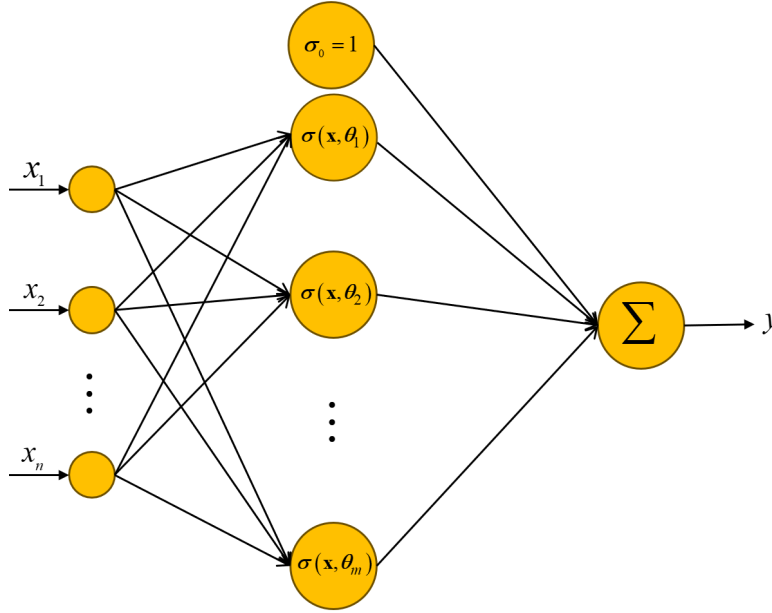


Рис. 2: The model of a standard neural network architecture with 3 hidden layers.

$i \in 1, \dots, n, j \in 1, \dots, m$, such that

$$(A_n f)(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^n w_i \sigma \left(\sum_{j=1}^m (w_{i,j}^{(1)} x_j + b_j^{(1)}) , \dots , \sum_{j=1}^m (w_{i,j}^{(H)} x_j + b_j^{(H)}) \right)$$

is an approximation of the function f , i.e.

$$|f - A_n f| < \varepsilon. \quad (1)$$

Proof. If we consider dimension of weight connection as $H = 1$, then the NN model becomes standard NN model with a sigmoid activation function and its proof is trivial, since by using the universal approximation theorem for standard NN model with sigmoid activation function is already proved. Here, we have to consider the case when dimension of weight connection $H \geq 2$, since our proposed model has multidimensional weight connections.

According to the theorem of universal approximation capabilities of traditional NN, for any $f \in C(\mathbf{x}), \varepsilon > 0$, there exist $n, w_{i,j}^{(1)}, b_{i,j}^{(1)}, w_i, \alpha$, such that

$$\left(\tilde{A}_n f \right) (x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^n w_i \sigma \left(\sum_{j=1}^m (w_{i,j}^{(1)} x_j + b_j^{(1)}) \right)$$

is a traditional NN model with standard weight connections and this can be an approximation of the following function f , i.e.

$$\left| f - \tilde{A}_n f \right| < \frac{\varepsilon}{\alpha}. \quad (2)$$

where $\sigma(\cdot)$ is a well-known sigmoid activation function. Further we will show for the above $\tilde{A}_n f$, ε , where exist $w_{i,j}^{(2)}, b_{i,j}^{(2)}$ such that

$$(A_n f)(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^n w_i \sigma \left(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(1)} x_j + b_j^{(1)}, \dots, \sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)} \right)$$

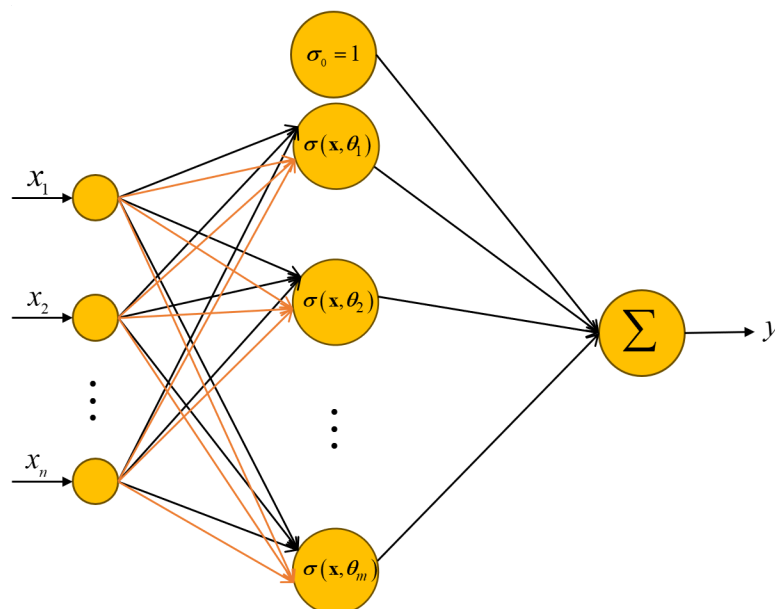


Рис. 3: The model structure of the proposed multidimensional MCNN with two-dimensional weight connections.

is the MCNN model which has 2-dimensional connection weights and this can be an approximation of the following function $\tilde{A}_n f$, i.e.

$$\left| A_n f - \tilde{A}_n f \right| < \frac{\varepsilon}{\cdot} \quad (3)$$

By combining inequalities (2) and (3), the idea for $H = 2$ can be proved easily. Then, let us prove that inequality (3) is established.

$$\begin{aligned} \left| A_n f - \tilde{A}_n f \right| &= \left| \sum_{i=1}^n w_i \frac{1}{1 + \sum_{h=1}^H e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(h)} x_j + b_j^{(h)})}} - \sum_{i=1}^n w_i \frac{1}{1 + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(1)} x_j + b_j^{(1)})}} \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{1}{1 + \sum_{h=1}^H e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(h)} x_j + b_j^{(h)})}} - \frac{1}{1 + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(1)} x_j + b_j^{(1)})}} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{1}{1 + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(1)} x_j + b_j^{(1)})} + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})}} - \frac{1}{1 + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(1)} x_j + b_j^{(1)})}} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{1 + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(1)} x_j + b_j^{(1)})} - 1 - e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(1)} x_j + b_j^{(1)})} - e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})}}{\left(1 + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(1)} x_j + b_j^{(1)})} + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})}\right) \left(1 + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(1)} x_j + b_j^{(1)})}\right)} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})}}{\left(1 + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(1)} x_j + b_j^{(1)})} + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})}\right) \left(1 + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(1)} x_j + b_j^{(1)})}\right)} \right) \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^n w_i \frac{e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})}}{M_i \left(M_i + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})} \right)} \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n |w_i| \frac{e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})}}{M_i \left(M_i + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})} \right)} \\
&\leq \frac{A}{B} \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})}}{B + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})}}
\end{aligned}$$

where $M_i = 1 + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(1)} x_j + b_j^{(1)})}$, $B = \min \{M_1, \dots, M_n\}$, $A = \max \{|w_1|, \dots, |w_n|\}$, Since $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, for any i , there exist parameters of NN, $w_{i,j}^{(2)}$, $b_{i,j}^{(2)}$, α such that

$$e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})} < \frac{B^2}{2nA} \varepsilon < \frac{B}{2nA} \varepsilon \left(B + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})} \right)$$

i.e.

$$\frac{e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})}}{B + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})}} < \frac{B}{2nA} \varepsilon.$$

Further, we have

$$\left| A_n f - \tilde{A}_n f \right| \leq \frac{A}{B} \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})}}{B + e^{-\alpha(\sum_{j=1}^m w_{i,j}^{(2)} x_j + b_j^{(2)})}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

And, for higher dimensions, for $H = 3, 4, \dots$, the similar way can be employed to prove the theorem.

Training the MCNN

In this section, we describe a process for training the proposed MCNN. In general, the training process is derived from the training property of feedforward neural networks.

The proposed MCNN with multiple hidden layers $H = 2$, denoted by MCNN-1-L1H2-1, can be trained with well-known backpropagation algorithm. Let $\{x, d\}$ be training examples, where $x = \{x_1, \dots, x_{n_0}\}^T$ is the input data, n_0 is the dimension of input samples and $d = \{d_1, \dots, d_{n_{L+1}}\}^T$ is a n_{L+1} - dimension of the output. We employ the loss function with a regularization as in the following form.

$$E = - \sum_{j=1}^{n_{L+1}} (d_j \log_{10} (y_j^{L+1}) + (y_j^{L+1} - d_j) (1 - \log_{10} (y_j^{L+1}))) +$$

$$\frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^L \sum_{h=1}^H \sum_{i=1}^{n_{l-1}} \sum_{j=1}^{n_l} R(w_{i,j,h}^l)$$

where

$$R(w_{i,j,h}^l) = \begin{cases} (w_{i,j,h}^l)^2, & w_{i,j,h}^l < 0 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

Computational experiments

We evaluated our proposed MCNN model on datasets that can be found on Machine Learning Repository [33]. Computational experiments were carried out iteratively and the learning characteristics as well as the classification characteristics for different configurations of the MCNN models were illustrated. All the comparisons were made with the relevant state-of-the-art deep learning and also machine learning algorithms such as C4.5, CART, XgBoost, etc.

As the regularization parameter λ is chosen from the sequence $\{1 \times 10^{-1}, 1 \times 10^{-2}, 1 \times 10^{-3}\}$ for other smaller data sets and $\{1 \times 10^{-2}, 1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}\}$ for datasets Adult and Secondary Mushroom, based on test set performance. The learning rate α is chosen from the sequence 0.2, 0.04, 0.002 based on validation set performance across all datasets. For the traditional NN, the activation function used in the hidden layer and output layer was the sigmoid activation function. And for the proposed MCNN we employ sigmoid activation function which is defined in Theorem 1. For NN and MCNN models the same activation function are used in the output layer as softmax activation function. The loss function for training both models was cross-entropy loss with non-negative constraints.

Firstly, computational experiments are conducted to evaluate the classification performance of different MCNN models with different numbers of weight connections $H \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$ on the Adult and Secondary Mushroom datasets. In the experiment, the number of weight connections was set to 1 and 2 for MCNN and NN, which means that both models have a relatively equal number of trainable parameters (weight connections). Moreover, different constructed models were tested with the dimension of weight connections H which was set equal to 2, ..., 12 for MCNN. For MCNN, different numbers of weight connections H were used. The name of the model, for example, MCNN-4-L1H2-1 means that the MCNN model has 4 inputs, 2 weight connections between each input and a hidden unit (neuron), respectively, their 8 threshold coefficients and 1 output value, and the total number of training parameters is $2 \times 8 + 8 = 24$. And the MCNN-4-L1H8-1 model means that the MCNN model has 8 weight connections between each input and a hidden unit, that is, its dimension of weight parameters is 72. In the computational experiment, for comparison, the average classification results and training time obtained various MCNN models and NN models for 5 attempts, where the optimal ones were also given for each attempt. The results of computational experiments are shown in tables 1 and 2.

From the results shown in Table 2, it is evident that MCNN consistently outperformed NN on all training datasets, and the proposed MCNN model achieved better classification results

on most datasets, with the exception of Secondary Mushroom and Abalone data, on which CART achieved better results. However, on the Secondary Mushroom and Abalone datasets, MCNN performed only slightly worse than CART. In Fig. Figure 4 shows the performance characteristics of the models MCNN-5-H2-1, MCNN-5-L1H4-1, MCNN-5-L1H10-1, MCNN-5-L1H15-1, MCNN-5-L1H20-1 for various parameters regularization on the Secondary Mushroom dataset. We can observe that when λ was smaller, MCNN obtained better performance on the Secondary Mushroom dataset.

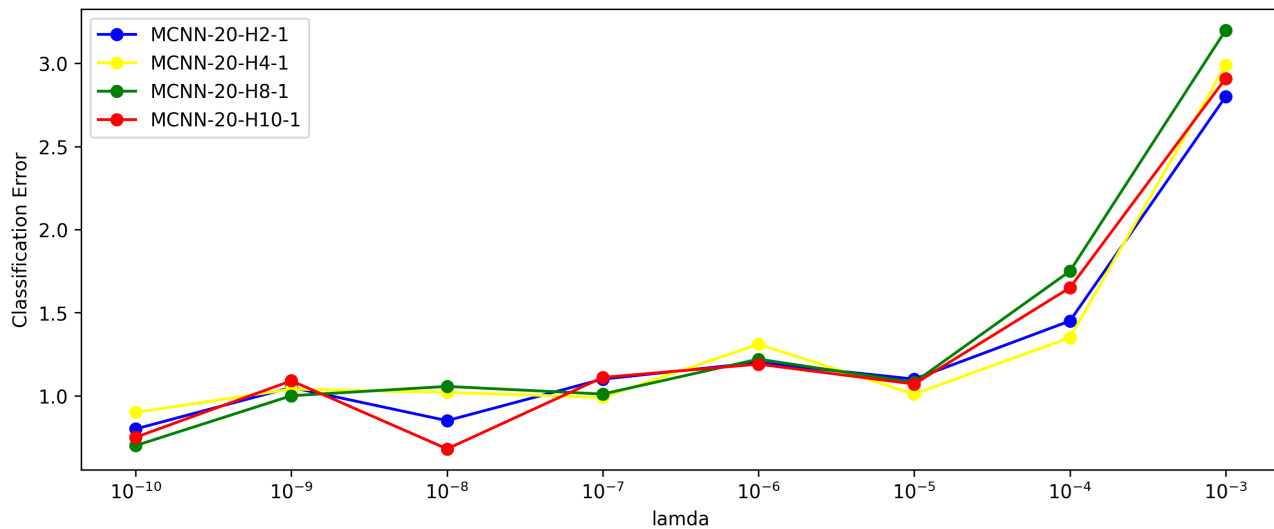


Рис. 4: The model of a standard neural network architecture with 3 hidden layers.

From Table 2 we can also observe that MCNN with a smaller number of weights still outperforms traditional NN with a large number of weights, that is, MCNN-5-L1H10-1, MCNN-5-L1H15-1, MCNN-5-L1H20-1. The results show that MCNN is superior to NN not because MCNN has more weights than NN, but because each MCNN unit is determined by coordinating multiple filters, while each NN unit is determined by only one filter. From Table 1 it can also be noted that the training time of the MCNN is longer, the larger its dimension, which is the result of introducing a larger number of parameters.

We compare the accuracy of our proposed neural network structure on face identification task with other models on training datasets to evaluate the performance. We applied cross-validation for training on face datasets. On each epoch, we use half of the samples in classes of face dataset with more than one training sample. The average accuracy of proposed model and SVM method is estimated to be 98.50% and 97.57%.

Meantime, we test our proposed model on LFW face dataset. The comparison results are given below in Table 3.

From Table 4, we can see that the proposed NN architecture always has the highest recognition rate than other methods. Therefore, we can claim that our proposed NN structure is much more effective compared to other algorithms.

Conclusion

In this paper, we introduce that, according on research in the field of neurobiology has shown that biological neurons are influenced by mutual neurotransmitters, that is, between

Таблица 2: Average test classification errors, average training time, and optimal for 5 attempts with different MCNN models on the Secondary Mushroom and Adult training dataset. The lowest classification errors for methods are shown in bold.

Dataset	Model	Regularization parameter λ	Classification error	Time (s)
Secondary Mushroom	MCNN-20-L1H2-2	$1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-8}$	1.77	188
	MCNN-20-L1H4-2	$1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-6}$	1.79	201
	MCNN-20-L1H5-2	$1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-8}$	1.65	210
	MCNN-20-L1H8-2	$1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-6}$	1.69	223
	MCNN-20-L1H10-2	$1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-7}$	1.63	235
	MCNN-20-L1H15-2	$1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-6}$	1.64	241
	MCNN-20-L1H20-2	$1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-6}$	1.69	255
Adult	MCNN-14-L1H3-3	$1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-5}$	1.83	152
	MCNN-14-L1H4-3	$1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-5}$	1.71	162
	MCNN-14-L1H5-3	$1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-5}$	1.73	169
	MCNN-14-L1H6-3	$1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-6}$	1.52	180
	MCNN-14-L1H7-3	$1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-6}$	1.41	195
	MCNN-14-L1H10-3	$1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-6}$	1.45	206
	MCNN-14-L1H11-3	$1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-6}$	1.43	217

Таблица 3: Average and smallest errors of tests with different NN models and the proposed MCNN for 5 attempts on small data sets. The best result for each training dataset is shown in bold.

Dataset	Errors	NN	MCNN	C4.5	XgBoost
Secondary mushroom	average	1.521B±3.32	1.401B±3.22	1.433B±2.11	1.344B±1.13
	smallest	0	0	0	0
Adult	average	1.582B±0.42	1.622B±0.72	1.406B±0.74	1.306B±0.75
	smallest	0	0	0	0
CDC Diabetes Health Indicators	average	2.726B±0.81	2.612B±0.77	2.650B±0.64	2.685B±0.87
	smallest	0.541	0.257	0	0
Abalone	average	1.250B±0.68	1.188B±0.79	1.251B±0.56	1.306B±0.83
	smallest	0.158	0	0	0
MetroPT-3	average	3.211B±1.41	3.356B±1.16	3.201B±1.33	3.176B±1.45
	smallest	0	0	0	0
Cirrhosis Patient Survival Prediction	average	1.632B±2.22	1.322B±2.15	1.557B±1.25	1.433B±0.95
	smallest	0.255	0	0	0
DARWIN	average	3.561B±1.40	3.204B±1.12	2.966B±1.86	3.101B±1.47
	smallest	0.240	0.120	0	0

Таблица 4: Comparison results on LFW dataset with different classifiers.

Method	Avg. accuracy
DeepFace-ensemble	0.9624 B \pm 0.0025
DeepID	0.9635 B \pm 0.0035
ConvNet-RBM	0.9427 B \pm 0.0028
Proposed NN model	0.9810 B \pm 0.0031

Таблица 5: Recognition rates results of the different datasets.

Method	NN	SVM	Proposed NN model
ORL Face	93.20	93.00	97.15
LFW	94.35	94.52	97.50
FERET	87.13	72.17	96.50
SCface	93.60	94.41	96.20
AR Face	91.21	83.51	94.11
YALE	91.51	92.23	93.21

two neurons, they release several neurotransmitters of different values and send information to each other. Based on this biological approach, a new model of neural networks, new types of artificial neural networks are proposed by increasing the amount of connection weights between two neurons. In mathematical models of artificial neural networks, it is assumed that there are several communication links between each link. The proposed neural network model can be obtained as mathematical models that are closer to biological neural networks.

FUNDING

The authors would like to thank the editors and the anonymous reviewers for their valuable comments and suggestions, which led to a substantial improvement of this paper. The authors also thank for the support of the grant from the Republic of Uzbekistan for the fundamental researches (grant No. IL-5421101773).

REFERENCES

1. Hinton G.E. Deep belief networks. Scholarpedia 4 (5) (2009) 5947.
2. Salakhutdinov R., Hinton G.E. Deep Boltzmann machines, Artif. Intell. Stat. 5 (2) (2009) 448-455.
3. Bengio Y., Lamblin P., Popovici D., et al., Greedy layer-wise training of deep networks, Adv. Neural Inf. Process. Syst. 19 (2007) 153-160.
4. Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G.E., Imagenet classification with deep convolutional neural networks, Adv. Neural Inf. Process. Syst. 60 (6) (2017) 84-90.
5. Ptucha R., Petroski S.F., Pillai S., et al., Intelligent character recognition using fully convolutional neural networks, Pattern Recognit. 88 (2019) 604-613.

6. Lauder J.M., Neurotransmitters as growth regulatory signals: role of receptors and second messengers, *Trends Neurosci.* 16 (6) (1993) 233-240.
7. Madrakhimov Sh.F., Rozikhodjaeva G. A. and Makharov K. T. "Construction of fuzzy inference rules for medicine diagnostics problems *Journal of Physics: Conf. Ser.* 2032 012032, 2021. doi: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2032/1/012032>
8. Madrakhimov Sh., Makharov K., Lolaev M. Data preprocessing on input. *AIP Conference Proceedings* 2365, 030003, 2021. doi: <https://doi.org/10.1063/5.0058132>.
9. Marakhimov A.R., Khudaybergenov K. K. A Fuzzy MLP Approach for Nonlinear System Identification, *Journal of Mathematical Sciences*, 2022, Vol. 265, No. 1. p.4351. doi: 10.1007/s10958-022-06043-z.
10. Marakhimov A.R., Kudaybergenov J.K., Khudaybergenov K. K., U.R. Ohundadaev. A multivariate binary decision tree classifier based on shallow neural network, *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2022, vol. 22, no. 4, pp. 725-733. doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-4-725-733.
11. Marakhimov A.R., Khudaybergenov K. K. A Recurrent Method for Structural-Parametric Identification of Fuzzy Neural Networks. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 2021, 1323 AISC, pp. 47-54.
12. Kurkova V. "Kolmogorov's theorem and multilayer neural networks," *Neural Networks*, Vol. 5, Issue 3, pp. 501-506, 1992.
13. Maiorov V., Pinkus A., "Lower bounds for approximation by MLP neural networks," *Neurocomputing*, Vol. 25, pp. 81-91, 1999.
14. Ismailov V.E. ВЪН On the approximation by neural networks with bounded number of neurons in hidden layers, ВЪК *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 417, Issue 2, pp. 963-969, 2014.
15. Crawley J.N., Stivers J.A., Blumstein L.K., et al., Cholecystokinin potentiates dopamine-mediated behaviors: evidence for modulation specific to a site of coexistence, *J. Neurosci.* 5 (8) (1985) 1972-1983.
16. McDonald A.J., Pearson J.C., Coexistence of GABA and peptide immunoreactivity in non-pyramidal neurons of the basolateral amygdala, *Neurosci. Lett.* 100 (1-3) (1989) 53-58.
17. Jiangshe Z. Junying H., Junmin L. Neural network with multiple connection weights. *Pattern Recognition*, Volume 107, November 2020, 107481. doi:10.1016/j.patcog.2020.107481.
18. Marakhimov A. R., Khudaybergenov K. K. (2020). Approach to the synthesis of neural network structure during classification. *International Journal of Computing*, 19(1), 20-26. <https://doi.org/10.47839/ijc.19.1.1689>.

REZYUME

Kognitiv fandagi tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, biologik neyronlar o'rtasida ma'lumot almashinuvi neyronlar o'rtasida signallarni uzatishni osonlashtiradigan neurotransmitterlarga tayanadi. Alohida neurotransmitterlarni chiqarish orqali neyron boshqa neyronga ma'lumot uzatadi, har bir neurotransmitter o'ziga xos funktsiyani bajaradi. Biologik nuqtai nazarga ko'ra, neyron juftlarini bog'laydigan sinaptik og'irliklar miqdorini oshiradigan yangi sun'iy neyron tarmoq modeli taklif etiladi. Ushbu yangi model inson miyasidagi biologik tizimlarda kuzatilganidek, har bir neyron aloqa o'rtasida bir nechta sinapslar mavjudligi haqidagi kontseptsiyaga asoslanadi. Bog'lanish og'irliklarining umumiy yig'indisi neurotransmitterlar toifasining yig'indisini aks ettiradi, og'irliklarning alohida komponentlari alohida neurotransmitterlarga mos keladi. Kirish va chiqishlar neurotransmitterlar o'rtasida samarali raqobatni ta'minlash uchun ko'zda tutilgan modeldagi har bir ulanish uchun evristik yondashuv yordamida tanlanadi. Ushbu xulosadan kelib chiqqan holda, taklif qilingan sun'iy neyron tarmoq modellarini biologik neyron tarmoqlari operatsiyalarini yaqindan aks ettiruvchi matematik tasvirlar sifatida modellashtirish mumkin. Rivojlanayotgan modellarning arxitektura tarkibiga kelsak, har bir yashirin neyronning faollashuvini aniqlashda bir nechta filtrlardan foydalanish neyron tarmoq tomonidan olingan xususiyatlarni yoritishni kuchaytirish imkoniyatiga ega.

Kalit so'zlar: Biologik neyron, sun'iy neyron, neyron to'ri, neurotransmitter, bog'lanish, regressiya masalasi.

UDC 517.988.52

**BITTA UZLUKSIZ VAQTLI DINAMIK SISTEMANING DINAMIKASI
HAQIDA**

Muzaffarova M. U. *

REZYUME

Maqolada uzluksiz va diskret vaqtli dinamik sistemalarning afzalliklari va kamchiliklari to'g'risida fikrlar bayon qilingan. Dinamik sistemalarga olib keluvchi masalalar va shu yo'nalishda ilmiy izlanishlar olib borayotgan olimlarning maqolalari tahlil qilingan. Ikkita Vol'terra tipidagi dinamik sistemaning analitik va sonli yechimlari topilgan. Qo'zg'almas nuqtalari aniqlangan va turg'unligi o'rganilgan. Sistemaning analitik va sonli yechimlari o'zaro taqqoslanib, taqqoslash natijalari grafiklar yordamida tasvirlangan. Izlanayotgan sistemaning muvozanat holatining turg'unligini ta'rif yordamida o'rganish tavsiya qilingan va uning tatbiqi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: Vol'terra tipidagi kvadratik stoxastik operator, uzluksiz va diskret vaqtli dinamik sistemalar, statistik va dinamik ko'rsatkichlar, matematik model, biologik populyatsiya, biotik va abiotik omillar, chetki operator, sifatli tahlil, fazali fazo, muvozanat holat.

Maqolada uzluksiz vaqtli Vol'terra tipidagi kvadratik stoxastik operatorlar (dinamik sistema) sifatli tahlil qilingan. Masalani o'rganishdan oldin dinamik sistemalar orqali qanday jarayonlarni o'rganish mumkinligi hamda uzluksiz va diskret vaqtli dinamik sistemalarning afzalliklari va kamchiliklari to'g'risidagi fikrlarni bayon qilamiz. So'ngra asosiy masalani o'rganamiz.

Ma'lumki, populyatsiyalarni o'rganishda asosan statistik va dinamik ko'rsatkichlardan foydalaniladi. Bu ko'rsatkichlar individlarning ma'lum bir davrdagi holatini tavsiflaydi va ularning tarkibiy va funksional xususiyatlari haqida ma'lumot beradi. Statistik ko'rsatkichlar raqamlar, zichlik va strukturani o'z ichiga oladi.

Asosiy dinamik ko'rsatkichlar esa quyidagilardir: tug'ilish, o'lim darajasi (bu tabiiy o'sishni tashkil qiladi), immigratsiya va emigratsiya (mexanik o'sish). Dinamik ko'rsatkichlar o'z navbatida zichlikka ham bog'liq.

Populyatsiyaning dinamikasini o'rganish populyatsiya ekologiyasining eng murakkab bo'limidir, chunki dinamikaga ko'plab omillar o'z ta'sirini ko'rsatadi. Populyatsiyaning dinamik ko'rsatkichlari – bu populyatsiyada ma'lum vaqt oralig'ida sodir bo'ladigan jarayonlarni aks ettiruvchi ko'rsatkichlardir.

Ko'pgina biologik populyatsiyalar soni uzluksiz o'zgarish xususiyatiga ega emas. Chunki populyatsiya dinamikasi alohida vaqtlarda (diskret vaqtlarda) sodir bo'ladi. Sodda organizmlar uchun bu vaqtlar orasidagi intervallar juda qisqa bo'lishi mumkin. Bu holda uzluksiz vaqtli matematik modellar haqiqiy jarayonni to'liqroq ifodalaydi. Shuning uchun dinamik ko'rsatkichlar uchun "biologik vaqt"ni hisobga olish muhim. Uning asosida kuzatish davri

*Muzaffarova M. U. – Buxoro davlat universiteti, muzaffarova.mohinur05@gmail.com

belgilanadi. Masalan, bakteriyalarning dinamikasini o'rganish uchun bir soat etarli bo'lishi mumkin, asalarilar uchun – bir necha hafta, kitlar uchun – o'nlab yillar zarur bo'ladi.

Aholi dinamikasining matematik modelini qurish uchun odatda turli gipotezalardan foydalaniladi. Eng oddiy farazlardan biri: aholi sonining o'zgarish tezligi kattalikning o'ziga proporsionaldir. Shu asosida Mal'tus T.R. [1] yerdagi aholi sonining o'zgarishini

$$N_{t+1} = mN_t$$

modeli orqali ifodalagan. Bu yerda m - proporsionallik koeffitsienti. Ushbu modelning uzluksiz vaqtli holi esa

$$\dot{N} = aN$$

ko'rinishda bo'lib, a - populyatsiyaning o'sish tempini ifodalovchi parametr.

Agar real jarayon olinadigan bo'lsa, biologik populyatsiyaning fazoviy va miqdoriy kattaligiga biotik va abiotik omillar sezilarli ta'sir ko'rsatadi. Uzoq sovuq qish va bahorda oziq-ovqat etishmasligidan keyin populyatsiya soni yuzlab va hatto minglab marta kamayadi. S.S. Chetverikov birinchi bo'lib populyatsiyalardagi individlar soni o'zgarishining evolyutsion ahamiyatiga e'tibor qaratdi [2]. Shuning uchun ham ushbu omillarni evolyutsiya omillaridan biri sifatida ko'rib chiqish zarur bo'ladi.

Diskret vaqtli dinamik sistemalarda evolyutsiya holatini yoki jarayonlarning rivojlanish tendentsiyasining dastlabki holatini hisobga olgan holda, masalan, shaxslar o'rtasidagi o'zaro ta'sirni e'tiborsiz qoldiradi. Misol uchun, bolaning hozirgi ko'rsatkichlari uning va onasining bir oy oldin olgan ballari bilan bog'liq. Diskret vaqtli modellar ona-bolaning o'zaro ta'sirini o'lchovlar orasida inobatga olmay, bir necha diskret onlarda o'zaro munosabatda bo'lishadi deb hisobga oladi. Aslida, onalar va bolalar "o'lchovlar orasida o'zaro munosabatda bo'ladilar ...". Agar bu ballar (bolaning bali va onaning bali) ikkita o'zgaruvchini (ehtimol, ona va bola o'rtasidagi har oylik o'zaro ta'sir) ifodalash uchun tasavvur qilinsa, diskret vaqtli yondashuvlar nazariy jihatdan qiziqarli bo'lgan modellarga olib kelishi mumkin [3].

Keyinchalik diskret vaqtli kvadratik stoxastik operatorlar nazariyasiga S.N.Bernshteyn asos solgan [4]. Bu yo'nalish kengaytirilib, Yu.I.Lyubich tomonidan [5] ikki jinsli kvadrat stoxastik operatorlar nazariyasi tushunchasi kiritilgan. [6] da ikki jinsli kvadratik stoxastik operatorlarning qism sinfiga mansub ikki jinsli kvadratik stoxastik operatorlar o'rganilib, yangicha yondashuv bilan fundamental natijalarga erishilgan. Shuningdek, ikki jinsli kvadratik stoxastik operatorlarning o'n oltita chetki operatorlari keltirib chiqarilgan va holati o'rganilgan.

Mazkur maqolada aytib o'tilgan o'n oltita chetki operatorning uchinchi va oltinchi operatorlarining uzluksiz vaqtli analogining analitik va sonli yechimlari topilgan. Qo'zg'almas nuqtalari aniqlangan va turg'unligi topilgan. Analitik va sonli yechimlar o'zaro taqqoslangan.

Shu bilan bir qatorda, biz o'rganilayotgan operatorlarning murakkab biologik tizimlarni qanchalik aniq tasvirlashi mumkin degan savolga imkon qadar javob berishga harakat qilamiz. Umuman olganda bu kabi savollarga hozirgi kunga qadar aniq va to'liq javob yo'q.

Ushbu operatorlarni o'rganish bo'yicha motivatsiyani [7] va [8] ilmiy maqolalardan topish mumkin. Binobarin, har bir operatorning trayektoriyalari xilma-xil bo'lgan ko'p o'lchovli, chiziqli bo'lmagan dinamik sistemalar nazariyasida qiziqarli misol bo'la oladi.

[6] maqolada keltirilgan o'n oltita chetki operatorning uchinchisini uzluksiz analogi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t)y_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t); y_1(t), y_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)y_2(t) - x_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t); y_1(t), y_2(t)) \\ \dot{y}_1(t) = 0 = f_3(x_1(t), x_2(t); y_1(t), y_2(t)) \\ \dot{y}_2(t) = 0 = f_4(x_1(t), x_2(t); y_1(t), y_2(t)) \end{cases} \quad (1)$$

yoki uning vektor ko‘rinishi $\dot{X}(t) = F(X(t))$ bo‘lib, bu yerda

$$X(t) = (x(t); y(t)) = (x_1(t), x_2(t); y_1(t), y_2(t)), \\ F(X(t)) = F(x_1(t), x_2(t); y_1(t), y_2(t)) = (f_1, f_2, f_3, f_4), \quad t \geq 0,$$

$X(t)$ – qandaydir biologik sistemaning holati, $(x_1(t), x_2(t))$ va $(y_1(t), y_2(t))$ ehtimollik taqsimoti juftligi. Masala shartiga ko‘ra, $x_1(t) \geq 0$, $x_2(t) \geq 0$, $y_1(t) \geq 0$, $y_2(t) \geq 0$.

Masalaning qo‘yilishi. Ushbu maqolada (1) sistemani quyidagi

$$\bar{\Omega}_1 = \{(x_1(t), x_2(t)) : x_1(t) \geq 0, \quad x_2(t) \geq 0, \quad x_1(t) + x_2(t) \leq 1\},$$

$$\bar{\Omega}_2 = \{(y_1(t), y_2(t)) : y_1(t) \geq 0, \quad y_2(t) \geq 0, \quad y_1(t) + y_2(t) \leq 1\}$$

kengaytirilgan sohada sifatli tahlil qilish, xususan, qo‘zg‘almas nuqtalari, analitik va sonli yechimlarini izlash, fazali portretini chizish va olingan natijalarni tahlil qilish masalalari qaraladi.

Qulaylik uchun funksiyalarning argumentini yozmaymiz. (1) sistemani analitik yechimini izlaymiz. (1) sistemaning $\Omega_1 \times \Omega_2$ sohada yechimlari quyidagi ko‘rinishga ega:

$$1) \begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = C_2, \\ y_1 = 0, \\ y_2 = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = 0, \\ y_1 = C_3, \\ y_2 = C_4; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 = \frac{C_2 C_3}{C_4 - 1} e^{(C_4 - 1)t} + C_1, \\ x_2 = C_2 e^{(C_4 - 1)t}, \\ y_1 = C_3, \\ y_2 = C_4. \end{cases} \quad (2)$$

Ushbu 1) va 2) yechimlar o‘zgarmas qiymatlardan iborat bo‘lganligi uchun nazariy jihatdan qiziqish uyg‘otmaydi. Shuning uchun kelgusida 3) yechimni o‘rganamiz.

1-ta’rif. [1, 15 bet] (1) sistemaning muvozanat holati deb fazali fazoning shunday $X^*(t)$ nuqtalariga aytiladiki, u nuqtalarda $F^*(X^*(t)) = 0$ bo‘ladi.

Ko‘rinib turibdiki, $X^*(t)$ ham (1) sistemaning yechimi bo‘ladi, chunki $\dot{X}^*(t) = 0$.

(1) sistema $M_1(C_1, 0; C_3, C_4)$ va $M_2(C_1, C_2; 0, 1)$ ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p muvozanat nuqtalarga ega.

Sistemani $M_1(C_1, 0; C_3, C_4)$ muvozanat nuqtasi atrofida o‘rganamiz.

Lemma. O‘rganilayotgan masala uchun integrallash o‘zgarmaslari C_1 , C_3 va C_4 lar bir vaqtning o‘zida nolga teng bo‘la olmaydi.

Isbot. Faraz qilamiz, $C_1 = C_3 = C_4 = 0$ bo‘lsin. Ushbu nuqtada sistema turg‘un. Haqiqatan ham, Lyapunov funksiyasini $V(t) = x_1(t) + x_2(t)$ ko‘rinishida tuzib olamiz. Bu

funksiya Lyapunovning ikkinchi teoremasining birinchi va ikkinchi shartlarini qanoatlantiradi [9, 34 bet].

$V(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$ funksiyani (1) sistemaga ko'ra hosilasini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= x_2(t) y_1(t) + x_2(t) y_2(t) - x_2(t) = \\ &= x_2(t) (y_1(t) + y_2(t) - 1) \leq 0.\end{aligned}$$

Demak, (1) sistema $M_3(0, 0; 0, 0)$ muvozanat nuqtasida turg'un bo'ladi.

Qaralayotgan masalada $(x_1(t), x_2(t); y_1(t), y_2(t))$ ehtimollikni ifodalashini inobatga olib, $x_1(t)$ va $x_2(t)$ hamda $y_1(t)$ va $y_2(t)$ lar bir vaqtning o'zida nolga yaqin bo'lishi nazariy jihatdan qiziqish uyg'otmaydi. Demak, C_1 , C_3 va C_4 lar bir vaqtning o'zida nolga teng bo'lsa, masala shartlari bajarilmaydi. Lemma isbotlandi.

Xuddi shuningdek, $\Omega_1 \times \Omega_2$ sohada (1) sistemani $M_1(C_1, 0; C_3, C_4)$ muvozanat nuqtasida ham turg'unligini isbotlash mumkin.

$M_2(C_1, C_2; 0, 1)$ muvozanat nuqtasi $\Omega_1 \times \bar{\Omega}_2$ sohasida joylashgan. Ikkinchi tomondan $C_2 \neq 0$ bo'lsa, bu muvozanat nuqtada sistema noturg'un bo'ladi. Chunki, $t \rightarrow 0$ da $x_2(t) \rightarrow 0$ bo'lib, qo'zg'almas nuqtadan uzoqlashadi.

(1) sistema uchun Koshi masalasini qaraymiz. $t = 0$ da

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad y_1(0) = y_1^0, \quad y_2(0) = y_2^0 \quad (3)$$

bo'lsin. U holda 3) yechim quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_2^0 y_1^0}{y_2^0 - 1} e^{(y_2^0 - 1)t} + (x_1^0 + x_2^0), \\ x_2 = x_2^0 e^{(y_2^0 - 1)t}, \\ y_1 = y_1^0, \\ y_2 = y_2^0, \end{cases} \quad (4)$$

bunda $C_1 = x_1^0 + x_2^0$, $C_2 = x_2^0$, $C_3 = y_1^0$, $C_4 = y_2^0$.

Lyapunov funksiyasini qurish bo'yicha aniq bir usul yo'q. Shu sababli uni tuzishda ko'pincha qiyinchilikka duch kelinadi. Kelgusida yuqorida keltirilgan sistemalarni muvozanat holatini o'rganishda quyidagi ta'rifdan foydalanish tavsiya qilinadi.

2-ta'rif [10, 318 bet]. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lsaki, $|x_i^0 - \bar{x}_i^0| < \delta$, $|y_i^0 - \bar{y}_i^0| < \delta$, $i = 1, 2$ bo'lganda $0 \leq t < +\infty$ lar uchun

$$|x_i(t, x_1^0, x_2^0; y_1^0, y_2^0) - x_i(t, \bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0; \bar{y}_1^0, \bar{y}_2^0)| < \varepsilon,$$

$$|y_i(t, x_1^0, x_2^0; y_1^0, y_2^0) - y_i(t, \bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0; \bar{y}_1^0, \bar{y}_2^0)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda (1) sistemani yechimi $(x_1(t), x_2(t); y_1(t), y_2(t))$ Lyapunov ma'nosida turg'un deyiladi. Bu yerda $(\bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0; \bar{y}_1^0, \bar{y}_2^0)$ - o'zgartirilgan boshlang'ich qiymatlar.

Faraz qilamiz, $X(x_1(t), x_2(t); y_1(t), y_2(t))$ va $\Phi(\varphi_1(t), \varphi_2(t); \psi_1(t), \psi_2(t))$ lar mos ravishda (1) sistemaning $t = t_0$ da $x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$, $y_1(t_0) = y_1^0$, $y_2(t_0) = y_2^0$ va

$\varphi_1(t_0) = \varphi_1^0$, $\varphi_2(t_0) = \varphi_2^0$, $\psi_1(t_0) = \psi_1^0$, $\psi_2(t_0) = \psi_2^0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi ikkita yechimi bo'lsin.

2-ta'rifga ko'ra,

$$|x_1^0 - \varphi_1^0| < \delta, \quad |x_2^0 - \varphi_2^0| < \delta, \quad |y_1^0 - \psi_1^0| < \delta, \quad |y_2^0 - \psi_2^0| < \delta. \quad (5)$$

U holda (4) dan

$$|C_{i+2} - \bar{C}_{i+2}| = |y_i^0 - \psi_i^0| < \delta, \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

bo'lishini aniqlaymiz.

Xuddi shunga o'xshash

$$|C_1 - \bar{C}_1| < 2\delta, \quad |C_2 - \bar{C}_2| < \delta \quad (7)$$

tengsizliklarning bajarilishi isbotlanadi.

Endi (6) va (7) lar o'rinli bo'lganda, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun quyidagilar o'rinli bo'lishini isbotlaymiz:

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \quad |y_i(t) - \psi_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

(8) tengsizliklarni o'rinli bo'lishini (4) sistemaning ikkinchi misolida, ya'ni

$$|x_2(t) - \varphi_2(t)| < \varepsilon$$

tengsizlikda ko'rib chiqamiz. (4) dan quyidagilarni topamiz:

$$\begin{aligned} |x_2(t) - \varphi_2(t)| &= \left| x_2^0 e^{(y_2^0-1)t} - \bar{x}_2^0 e^{(\bar{y}_2^0-1)t} \right| = \\ &= \left| x_2^0 e^{(y_2^0-1)t} - \bar{x}_2^0 e^{(y_2^0-1)t} - \left(\bar{x}_2^0 e^{(\bar{y}_2^0-1)t} - \bar{x}_2^0 e^{(y_2^0-1)t} \right) \right| \leq \delta + \delta = 2\delta. \end{aligned}$$

Agar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ deb olsak,

$$|x_2(t) - \varphi_2(t)| < \varepsilon$$

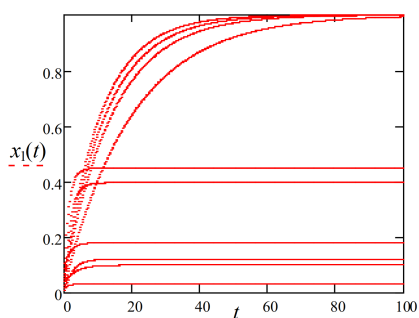
o'rinli bo'lishini topamiz. Qolgan tengsizliklar ham xuddi shunga o'xshash isbotlanadi. Demak, (1) sistemaning yechimi 1-ta'rifga ko'ra Lyapunov ma'nosida turg'un.

$(x_1^0, x_2^0; y_1^0, y_2^0)^T$ boshlang'ich shartlar sifatida quyidagi matritsaning mos ustunlaridagi qiymatlar olinadi:

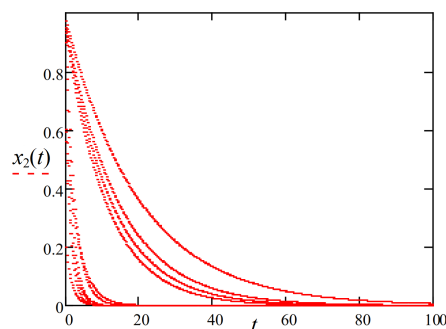
$$\begin{pmatrix} 0.01 & 0.02 & 0.04 & 0.03 & 0.04 & 0.108 & 0.07 & 0.06 & 0.05 & 0.03 \\ 0.9 & 0.198 & 0.6 & 0.09 & 0.56 & 0.592 & 0.93 & 0.94 & 0.95 & 0.97 \\ 0.05 & 0.04 & 0.03 & 0.06 & 0.35 & 0.407 & 0.09 & 0.08 & 0.07 & 0.05 \\ 0.595 & 0.396 & 0.7 & 0.4 & 0.45 & 0.293 & 0.91 & 0.92 & 0.93 & 0.95 \end{pmatrix}.$$

MathCAD matematik paketi orqali (1) sistemani (3) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi sonli yechimlarini izlaymiz.

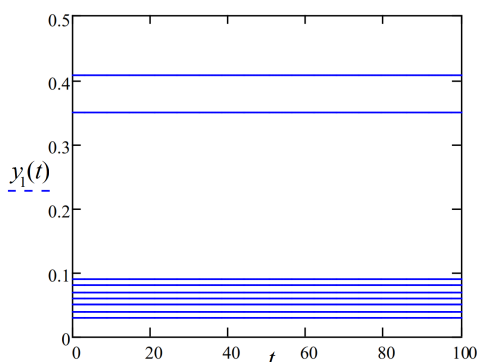
(1) sistemaning $\Omega_1 \times \Omega_2$ sohadagi sonli yechimlarining grafiklari 1-4-chizmalarda keltirilgan. Chizmalarda $x_1(t)$ va $x_2(t)$ hamda $y_1(t)$ va $y_2(t)$ lar (1) sistemaning sonli yechimlarini ifodalaydi.



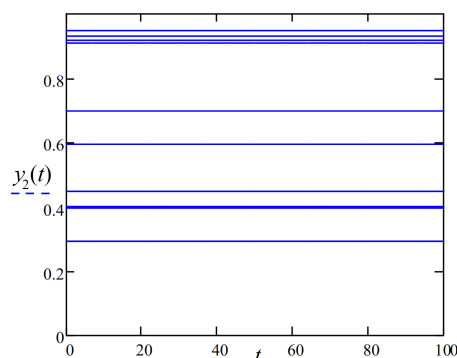
1-chizma



2-chizma



3-chizma

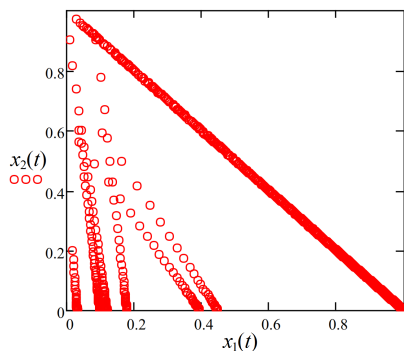


4-chizma

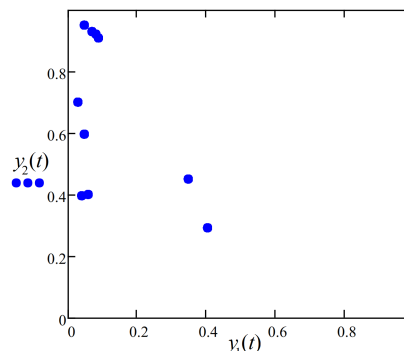
1-chizmadagi 1 ga intilgan trayektoriyalar boshlang‘ich shartlar berilgan matritsaning 7-10 ustunlaridagi qiymatlarga mos keladi. Shu ustundagi boshlang‘ich qiymatlarning yig‘indisi, ya‘ni $x_1^0 + x_2^0 = 1$ bo‘lib, $x_1(t)$ yechimning $t \rightarrow +\infty$ da 1 ga intilishi (4) sistemaning birinchi tenglamasidan ham kelib chiqadi.

5-6-chizmalarda $(x_1(t), x_2(t))$ hamda $(y_1(t), y_2(t))$ tekisligida $x_1(t)$ va $x_2(t)$ hamda $y_1(t)$ va $y_2(t)$ yechimlarning fazali trayektoriyalari tasvirlangan.

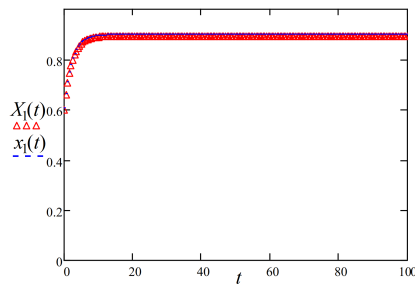
7-8-chizmalarda o‘rganilayotgan sistemaning analitik $x_1(t)$ ($x_2(t)$) va sonli yechimlari $X_1(t)$ ($X_2(t)$) tasvirlangan va taqqoslangan. Bunda boshlang‘ich qiymatlar sifatida $x_1^0 = 0.6$, $x_2^0 = 0.3$, $y_1^0 = 0.443$, $y_2^0 = 0.557$ qiymatlar olingan.



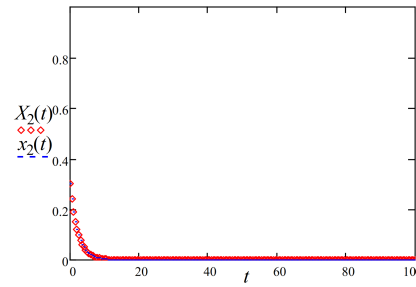
5-chizma



6-chizma



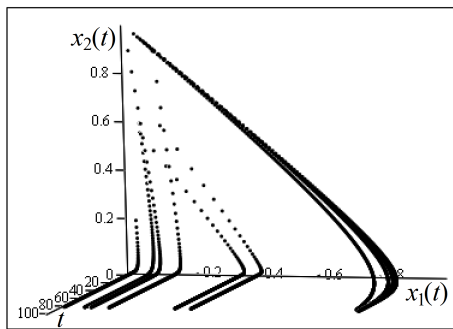
7-chizma



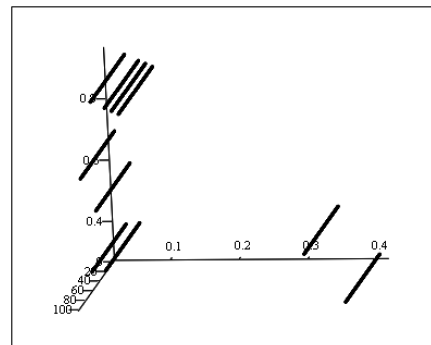
8-chizma

7-8-chizmalardan ko'rinib turibdiki, (1) sistemaning sonli va analitik yechimlari o'zaro ustma-ust tushadi.

Yechimlarni $(t, x_1(t), x_2(t))$ va $(t, y_1(t), y_2(t))$ fazosida fazali traektoriyalarini quramiz. Ular 9-10-chizmalarda tasvirlangan.



9-chizma



10-chizma

9-chizmadagi bir nuqtaga intilgan yechimlarning trayektoriyalari ham 1-chizmadagiga o'xshab, boshlang'ich qiymatlar berilgan matritsaning 7-10-ustunlaridagi qiymatlarga mos keladi. Bunda, $t \rightarrow +\infty$ da $x_1(t) \rightarrow 1$ va $x_2(t) \rightarrow 0$.

Endi (1) sistemani simpleksda, ya'ni $S^1 \times S^1$ da qaraymiz, bunda

$$S^1 = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\},$$

$$(S^1 = \{(y_1, y_2) : y_1 + y_2 = 1, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}).$$

Sistemaning yechimlari quyidagi ko'rinishga ega:

$$4) \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ y_1 = C_3, \\ y_2 = 1 - C_3; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x_1 = 1 - C_2 e^{-C_3 t}, \\ x_2 = C_2 e^{-C_3 t}, \\ y_1 = C_3, \\ y_2 = 1 - C_3. \end{cases}$$

4) yechim o'zgarmas qiymatlardan iborat bo'lganligi uchun nazariy jihatdan qiziqish uyg'otmaydi. Shuning uchun 5) yechimni o'rganamiz. Sistemaning 5) umumiy yechimining (3)

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi analitik yechimi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

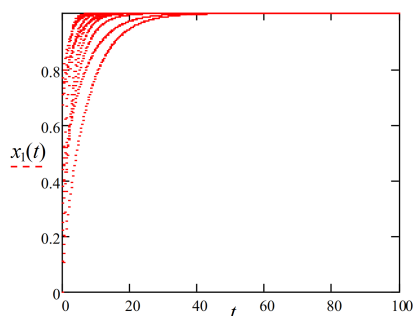
$$\begin{cases} x_1 = 1 - (1 - x_1^0)e^{-y_1^0 t}, \\ x_2 = x_2^0 e^{-y_1^0 t}, \\ y_1 = y_1^0, \\ y_2 = 1 - y_1^0. \end{cases} \quad (9)$$

(1) sistema $S^1 \times S^1$ da ikkita qo'zg'almas nuqtaga ega: $M_3(1, 0; C_3, 1 - C_3)$ va $M_4(C_1, C_2; 0, 1)$. Agar $C_2 \neq 0$ bo'lsa (1) sistema $M_4(C_1, C_2; 0, 1)$ muvozanat holatida noturg'un bo'ladi. Agar $C_2 = 0$ bo'lsa, $C_1 = 1$ bo'lib, sistema $M_4(1, 0; 0, 1)$ muvozanat holatida asimptotik turg'un bo'ladi. $M_3(1, 0; C_3, 1 - C_3)$ muvozanat holatida sistema turg'un. Buni yuqorida tavsiya qilingan usul yordamida isbotlash mumkin.

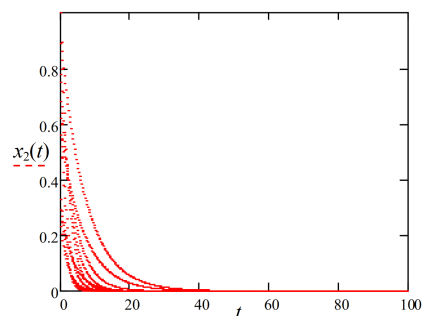
(1) ni $S^1 \times S^1$ da quyidagi boshlang'ich shartlarni

$$\begin{pmatrix} 0.01 & 0.02 & 0.04 & 0.03 & 0.04 & 0.108 & 0.07 & 0.06 & 0.05 & 0.03 \\ 0.9 & 0.198 & 0.6 & 0.09 & 0.56 & 0.592 & 0.93 & 0.94 & 0.95 & 0.97 \\ 0.05 & 0.04 & 0.03 & 0.06 & 0.35 & 0.407 & 0.09 & 0.08 & 0.07 & 0.05 \\ 0.595 & 0.396 & 0.7 & 0.4 & 0.45 & 0.293 & 0.91 & 0.92 & 0.93 & 0.95 \end{pmatrix}$$

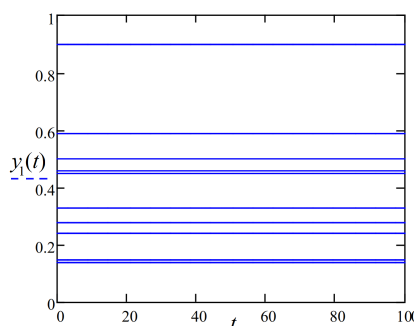
qanoatlantiruvchi yechimi va $(x_1(t), x_2(t))$ hamda $(y_1(t), y_2(t))$ tekisligidagi fazali trayektoriyalari 11-16-chizmalarda tasvirlangan.



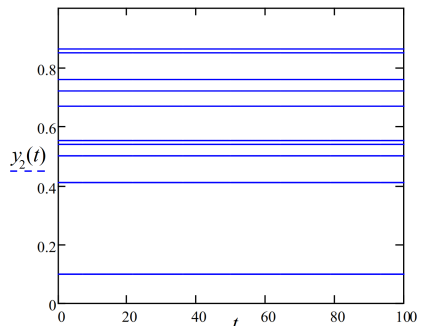
11-chizma



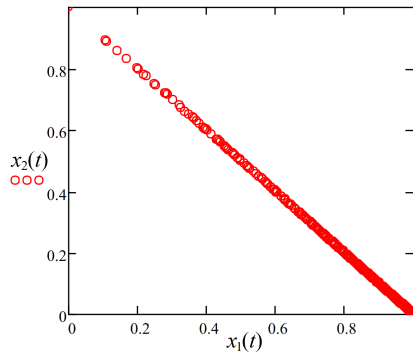
12-chizma



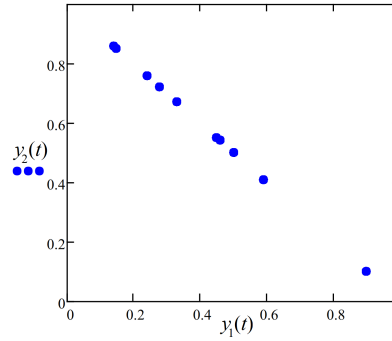
13-chizma



14-chizma



15-chizma



16-chizma

Shunday qilib quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema. (1) sistema $\Omega_1 \times \Omega_2$ sohada $M_1(C_1, 0; C_3, C_4)$ muvozanat nuqtasida Lyapunov ma'nosida turg'un, $M_2(C_1, C_2; 0, 1)$ ($C_2 \neq 0$) muvozanat nuqtasida Lyapunov ma'nosida noturg'un bo'ladi. Bundan tashqari, $\Omega_1 \times \Omega_2$ sohada

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1(t), x_2(t); y_1(t), y_2(t)) = (x_1^0 + x_2^0, 0; y_1^0, y_2^0)$$

va $S^1 \times S^1$ sohada

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1(t), x_2(t); y_1(t), y_2(t)) = (1, 0; y_1^0, 1 - y_1^0)$$

munosabatlar o'rinli.

[7] maqolada keltirilgan o'n oltita chetki operatorning oltinchisining uzluksiz analogi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = 0, \\ \dot{y}_1 = x_1 - y_1, \\ \dot{y}_2 = x_2 - y_2. \end{cases} \quad (10)$$

Ushbu sistemaning $\Omega_1 \times \Omega_2$ sohadagi yechimlari

$$6) \begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = C_2, \\ y_1 = C_1, \\ y_2 = C_2; \end{cases} \quad 7) \begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = C_2, \\ y_1 = C_1 - C_3 e^{-t}, \\ y_2 = C_2; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = C_2, \\ y_1 = C_1, \\ y_2 = C_2 - C_4 e^{-t}; \end{cases} \quad 9) \begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = C_2, \\ y_1 = C_1 - C_3 e^{-t}, \\ y_2 = C_2 - C_4 e^{-t} \end{cases}$$

va $S^1 \times S^1$ dagi yechimlari

$$10) \begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = 1 - C_1, \\ y_1 = C_1, \\ y_2 = 1 - C_1; \end{cases} \quad 11) \begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = 1 - C_1, \\ y_1 = C_1 - C_3 e^{-t}, \\ y_2 = 1 - C_1 + C_3 e^{-t}; \end{cases} \quad 12) \begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = 1 - C_1, \\ y_1 = C_1 + C_3 e^{-t}, \\ y_2 = 1 - C_1 - C_3 e^{-t} \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi. 6)-12) yechimlardan ko'rinib turibdiki, ular biror-bir jarayonni kengroq tavsiflab bera olmaydi. Shuning uchun ularni batafsil o'rganmaymiz.

O‘rganilayotgan (1) dinamik sistemani (oddiy differensial tenglamalar sistemalari) MathCAD matematik paketida yechganda Runge-Kutta sonli usulidan foydalanildi. Shu usul [11] ilmiy izlanishda ham qo‘llanilgan.

Olingan sonli yechimlar tahlil qilinganda, berilgan boshlang‘ich qiymatlarda Ω_1 sohada yechimlar $t = 100$ dan keyin $(x_1(t), x_2(t))$ tekisligida $(x_1^0 + x_2^0, 0)$ nuqtaga, $S^1 \times S^1$ sohada esa sonli yechimlar $t = 10$ dan keyin $(x_1(t), x_2(t))$ tekisligida $(1, 0)$ nuqtaga intilishi kuzatildi.

Fikrimizcha, (1) va (10) dinamik sistemalar qaysidir ma‘noda biror-bir murakkabroq biologik jarayonni kengroq ifodalay olmaydi. Chunki ikkala sistema ham ancha sodda hisoblanadi. Xususan, ularning ikkalasida ham ikkitadan o‘zgaruvchilar o‘zgarimas bo‘lib qolmoqda.

Muallif maqolani tayyorlashda bergan maslahatlari uchun Matematik analiz kafedراسi dotsenti X.R.Rasulovga minnatdorchilik bildiradi.

ADABIYOTLAR

1. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2010, 436 с.
2. Четвериков С.С. О некоторых моментах эволюционного процесса с точки зрения современной генетики // Классики советской генетики. Ленинград, 1968, 110 с.
3. Pascal R. Deboeck. Dynamical Systems and Models of Continuous Time // The Oxford Handbook of Quantitative Methods in Psychology: 2013, v. 2, Statistical Analysis, pp. 411-431.
4. Бернштейн С.Н. Теория вероятностей и математическая статистика (1911—1946 гг.), том IV, "Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности" , стр. 80-107, Наука, Москва, АН СССР, 1964.
5. Lyubich Yu.I. Mathematical Structures in Population Genetics, Biomathematics, 22, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
6. Розиков У.А., Жамилов У.У. Вольтерровские квадратичные стохастические операторы двуполюй популяции // Укр. мат. журн., 63:7, 2011, стр. 985–988.
7. Jenks R.D. Homogeneous multidimensional differential systems for mathematical models, J. Differential Equations, 4, 1968, pp. 549–565.
8. Jenks R.D. Quadratic differential systems for interactive population models. J. Differential Equations, 5, 1969, pp. 497-514.
9. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Москва, Наука, 1966, 531 с.
10. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений, Москва, издательство УРСС, 2006, 474 с.
11. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

РЕЗЮМЕ

В статье описаны преимущества и недостатки динамических систем непрерывного и дискретного времени. Анализированы проблемы, приводящие к динамическим системам, и исследование ученых, занимающихся научным исследованием в этом направлении. Найдены аналитические и численные решения двух динамических систем типа Вольтерры. Определены неподвижные точки и изучены их устойчивость. Сравнены аналитические и численные решения системы, и результаты сравнения иллюстрированы графиками. Рекомендуется исследования устойчивости положения равновесия системы по определению и показано его применение.

Ключевые слова: квадратичный стохастический оператор типа Вольтерры, непрерывные и дискретные динамические системы, статистические и динамические показатели, математическая модель, биологическая популяция, биотические и абиотические факторы, крайний оператор, качественный анализ, фазовое пространство, состояние равновесия.

RESUME

The article describes the advantages and disadvantages of continuous and discrete time dynamic systems. The problems leading to dynamic systems and the research of scientists engaged in scientific research in this direction are analyzed. Analytical and numerical solutions are found for two dynamic systems of Volterra type. Fixed points are determined and their stability is studied. Analytical and numerical solutions of the system are compared, and the comparison results are illustrated with graphs. It is recommended to study the stability of the equilibrium position of the system by definition and its application is shown.

Key words: quadratic stochastic operator of Volterra type, continuous and discrete dynamic systems, statistical and dynamic indicators, mathematical model, biological population, biotic and abiotic factors, extreme operator, qualitative analysis, phase space, equilibrium state.

UDC 517.918

**PANJARADAGI IKKI ZARRACHALI SISTEMAGA MOS FRIDRIXS
MODELI TIPIDAGI OPERATORNING SPEKTRI VA REZOLVENTASI**

Norqulov O. M. *

REZYUME

Maqolada d o‘lchamli panjarali ikki zarrachali sistemaga mos chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lgan Fridrixs modeli tipidagi operator o‘rganilgan. Bu operatorning muhim va diskret spektrlari tavsiflangan. Mos rezolventa operatori qurilgan. Operatorning parametr funksiyalariga qo‘yilgan ba‘zi tabiiy shartda (maxsus hol) uning diskret spektri va rezolventa operatori tadqiq qilingan.

Kalit so‘zlar: panjara, zarracha, Fridrixs modeli, Fredgolm determinanti, muhim spektr, diskret spektr, rezolventa operatori.

1. Kirish.

Ikki va uch zarrachali standart va diskret Shryodinger operatorlari hamda ularga mos turli model operatorlarning muhim spektrini tavsiflash, muhim spektrdan tashqarida yoki muhim spektr ichida joylashgan xos qiymatlar sonini aniqlash, ularning mavjudlik shartlarini aniqlash, rezolventa operatorini qurish kabil masalalar ko‘plab olimlar tomonidan o‘rganilmoqda [1-9]. Xususan, [1-3] maqolalarda standart Shryodinger operatorlarining, [4-5] ishlarda diskret Shryodinger operatorlarining va [6-9] ishlarda panjaradagi uchta zarrachali sistemaga mos model operatorlarning muhim spektrlari o‘rganilgan. Shu bilan bir qatorda [6-8] maqolalarda xos qiymatlari sonining chekli yoki cheksiz bo‘lish shartlari hamda xos qiymatlar soni cheksiz bo‘lgan holda ularning soni uchun asimptotik formula topilgan. Ta’kidlash joizki, [6-9] maqolalarda olib borilgan tadqiqotlarda ikki zarrachali sistemaga mos Fridrixs modeli tipidagi model operatorlarning spektral xossalari, ya’ni muhim spektri, xos qiymatlari soni, bu xos qiymatlarning joylashuv o‘rni, muhim spektr chap chegarasining bo‘lag‘aviy xos qiymat yoki virtual sath bo‘lish shartlarini topish muhim ahamiyat kasb etadi.

Ushbu maqolada d o‘lchamli panjaradagi ikki zarrachali sistemaga mos chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega H_μ , $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ Fridrixs modeli tipidagi operator Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator sifatida qaralgan. H_μ operatorning rezolventa operatori qurilgan. Ta’sirlashish parametri turli ishoraga ega bo‘lgan hol ko‘pi bilan ikki o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega bo‘lgan model operator uchun [10-11] ishlarda o‘rganilgan.

2. Ikki zarrachali sistemaga mos Fridrixs modeli tipidagi operatorning muhim va diskret spektrlari.

Maqola matnida foydalaniladigan ba‘zi belgilashlarni keltiramiz. Barcha kompleks, haqiqiy, butun va natural sonlar to‘plamini mos ravishda \mathbb{C} , \mathbb{R} , \mathbb{Z} va \mathbb{N} simvollar orqali belgilaymiz.

*Norqulov O. M. – Samarqand iqtisodiyot va servis instituti

Faraz qilaylik, $\mathbb{T}^1 := (-\pi; \pi]$ bo'lsin. \mathbb{T}^1 to'plamda elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari haqiqiy sonlarni 2π modul bo'yicha qo'shish va songa ko'paytirish kabi kiritiladi, buni quyidagi misolda tushuntiramiz:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} + \pi &= \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}; \\ 6 \cdot \frac{\pi}{5} &= 2\pi - \frac{4\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5} \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

Hosil bo'lgan to'plamga odatda bir o'lchamli tor deb ataladi. $d \in \mathbb{N}$ natural soni uchun \mathbb{T}^d orqali d o'lchamli torni, ya'ni

$$\mathbb{T}^d = \underbrace{\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \times \dots \times \mathbb{T}^1}_{d \text{ marta}}$$

to'plamni belgilaymiz. $L_2(\mathbb{T}^d)$ orqali \mathbb{T}^d torda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatli) funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz.

$L_2(\mathbb{T}^d)$ Hilbert fazosida

$$H_\mu := H_0 - \sum_{\alpha}^n \mu_\alpha V_\alpha \quad (1)$$

tenglik yordamida ta'sir qiluvchi operatorni qaraymiz. Bunda $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ bo'lib, μ_α haqiqiy sonlar ta'sirlashish parametrlari, H_0 operator ko'paytirish operatori bo'lib, $L_2(\mathbb{T}^d)$ Hilbert fazosida

$$(H_0 f)(x) = u(x)f(x)$$

kabi aniqlangan. $V_\alpha, \alpha = 1, \dots, n$ potensial operatorlari (bir o'lchamli integral operatorlari) bo'lib, $L_2(\mathbb{T}^d)$ Hilbert fazosida

$$(V_\alpha f)(x) = v_\alpha(x) \int_{\mathbb{T}^d} v_\alpha(t) f(t) dt, \quad \alpha = 1, \dots, n$$

kabi aniqlangan. Bu yerda $u(\cdot)$ va $v_\alpha(\cdot), \alpha = 1, \dots, n$ funksiyalar \mathbb{T}^d torda aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar bo'lib, $v_1(\cdot), \dots, v_n(\cdot)$ lar o'zaro chiziqli bog'lanmagan funksiyalar bo'lsin.

(1) tenglik orqali aniqlangan operatorga Fridrixs modeli tipidagi operator deyiladi. Funksional analiz kursining tegishli ta'riflaridan foydalanib uning parametrlariga qo'yilgan shartlarda chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator ekanligini ko'rsatish mumkin.

Maqola matnida foydalanish uchun $\sigma(\cdot), \sigma_{\text{ess}}(\cdot), \sigma_{\text{disc}}(\cdot)$ va $\rho(\cdot)$ simvollar orqali mos ravishda chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operatorning spektri, muhim spektri, diskret spektri va regulyar nuqtalar to'plami belgilangan.

Aniqlanishiga ko'ra H_μ operatorning

$$\sum_{\alpha=1}^n \mu_\alpha V_\alpha$$

qo'zg'alish operatori n o'lchamli chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi. Shu sababli chekli o'lchamli qo'zg'alishlarda muhim spektrning o'zgarmasligi haqidagi Veyl

teoremasiga ko'ra H_μ operatorning muhim spektri H_0 operatorning muhim spektri bilan ustma-ust tushadi, ya'ni

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\mu) = \sigma_{\text{ess}}(H_0).$$

Ma'lumki, H_0 operator $u(\cdot)$ uzluksiz funksiyaga ko'paytirish operatori bo'lganligi bois bu operator sof muhim spektrga ega bo'lib

$$\sigma(H_0) = \sigma_{\text{ess}}(H_0) = [m, M]$$

tenglik o'rinlidir, bu yerda m va M sonlari

$$m = \min_{x \in \mathbb{T}^d} u(x), \quad M = \max_{x \in \mathbb{T}^d} u(x)$$

kabi aniqlanadi.

Yuqoridagi ma'lumotlarga ko'ra, H_μ operatorning muhim spektri μ vektor-parametrdan bog'liq bo'lmagan holda

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\mu) = [m, M]$$

tenglik yordamida aniqlanadi.

H_μ operatorning diskret spektrini aniqlash maqsadida $\mathbb{C} \setminus [m; M]$ sohada regulyar bo'lgan

$$\Delta_\mu(z) := \begin{vmatrix} \delta_{11} - \mu_1 I_{11}(z) & \dots & \delta_{1n} - \mu_n I_{1n}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} - \mu_1 I_{n1}(z) & \dots & \delta_{nn} - \mu_n I_{nn}(z) \end{vmatrix},$$

$$I_{\alpha\beta}(z) := \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v_\alpha(t)v_\beta(t)}{u(t) - z} dt, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n$$

funksiyalarni kiritamiz, bu yerda

$$\delta_{\alpha\beta} := \begin{cases} 1, & \text{agar } \alpha = \beta \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } \alpha \neq \beta \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Ko'rinib turibdiki, barcha $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ indekslar va $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ soni uchun $I_{\alpha\beta}(z) = I_{\beta\alpha}(z)$ tenglik bajariladi. Odatda $\Delta_\mu(\mu)$ funksiyaga H_μ operatorga mos Fredholm determinanti deyiladi.

Endi o'quvchiga qulaylik uchun [12] maqolada H_μ operator uchun olingan natijalarni isbotsiz bayon qilamiz.

Quyidagi teorema H_μ operatorning xos qiymatlari va $\Delta_\mu(\cdot)$ funksiyaning nollari orasidagi munosabatni tavsiflaydi.

1-teorema. $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ soni H_μ operatorning xos qiymati bo'lishi uchun $\Delta_\mu(z)$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Quyidagi teoremlar H_μ operator m dan chapda va M dan o'ngda joylashgan xos qiymatlar mavjud bo'lishi mumkin bo'lgan hollarni tavsiflaydi.

2-teorema. Faraz qilaylik, barcha $\alpha = 1, \dots, n$ indekslar uchun $\mu_\alpha > 0$ bo'lsin. U holda H_μ operator m dan chapda yotuvchi ko'pi bilan n ta xos qiymatlarga (karraligi bilan hisoblaganda) ega bo'ladi, hamda M dan katta xos qiymatlarga ega bo'lmaydi.

3-teorema. Faraz qilaylik, barcha $\alpha = 1, \dots, n$ indekslar uchun $\mu_\alpha < 0$ bo'lsin. U holda H_μ operator m dan o'ngda yotuvchi ko'pi bilan n ta xos qiymatlarga (karraligi bilan hisoblaganda) ega bo'ladi, hamda m dan kichik xos qiymatlarga ega bo'lmaydi.

4-teorema. Faraz qilaylik, birork ($1 \leq k < n$) soni uchun shunday $i_1, i_2, \dots, i_k \in 1, 2, \dots, n$ sonlari topilib, $\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \dots, \mu_{i_k} > 0$ va ixtiyoriy $\alpha \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ indeks uchun $\mu_\alpha > 0$ bo'lsin. U holda H_μ operator muhim spektrdan chapda yotuvchi ko'pi bilan k ta xos qiymatga (karraligi bilan qo'shib hisoblaganda) muhim spektrdan o'ngda esa ko'pi bilan $n - k$ ta xos qiymatga (karraligi bilan qo'shib hisoblaganda) ega.

Izoh: Faraz qilaylik, $n = 5$ bo'lib, $\mu_1, \mu_4 > 0$ va $\mu_2, \mu_3, \mu_5 < 0$ bo'lsin. U holda 3-teoremaga ko'ra H_μ model operator ko'pi bilan beshta xos qiymatga ega bo'lib, ulardan ikkitasi muhim spektrdan chapda, qolgan uchasi esa muhim spektrdan o'ngda joylashgan bo'ladi.

3. Ikki zarrachali sistemaga mos Fridriks modeli tipidagi operatorning rezolventasi.

Endi H_μ operatorning rezolventasini aniqlash masalasini qaraymiz. Buning uchun fiksirlangan $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_\mu)$ soni uchun $f, g \in L_2(\mathbb{T}^d)$ funksiyalarga nisbatan

$$u(x)f(x) - \sum_{\alpha=1}^n \mu_\alpha v_\alpha(x) \int_{\mathbb{T}^d} v_\alpha(t)f(t)dt - zf(x) = g(x) \quad (2)$$

tenglamani qaraymiz.

$z \notin [m; M]$ ekanligidan barcha $x \in \mathbb{T}^d$ nuqtalarda $u(x) - z \neq 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Shu sababli (2) tenglamadan $f(\cdot)$ funksiya uchun

$$f(x) = \frac{1}{u(x) - z} \left[g(x) + \sum_{\alpha=1}^n \mu_\alpha v_\alpha(x) \int_{\mathbb{T}^d} v_\alpha(t)f(t)dt \right] \quad (3)$$

ifodani topamiz.

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$k_\alpha = \int_{\mathbb{T}^d} v_\alpha(t)f(t)dt, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (4)$$

$f(x)$ funksiya uchun topilgan (3) ifodani (4) belgilashga qo'yib,

$$k_\alpha = \int_{\mathbb{T}^d} v_\alpha(t) \left[\frac{g(t)}{u(t) - z} + \frac{1}{u(t) - z} \sum_{\beta=1}^n \mu_\beta v_\beta(t)k_\beta \right] dt, \quad \alpha = 1, \dots, n$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Bundan esa o'z navbatida

$$k_\alpha = \int_{\mathbb{T}^d} \left[\frac{v_\alpha(t)g(t)}{u(t) - z} + \sum_{\beta=1}^n \mu_\beta k_\beta \frac{v_\alpha(t)v_\beta(t)}{u(t) - z} \right] dt, \quad \alpha = 1, \dots, n$$

5-teorema. $L_2(\mathbb{T}^d)$ Hilbert fazosida (1) tenglik yordamida ta'sir qiluvchi H_μ operatorga mos $R_z(H_\mu)$ rezolventa operatori

$$(R_z(H_\mu)g)(x) = \frac{g(x)}{u(x) - z} + \frac{1}{\Delta_\mu(z)(u(x) - z)} \sum_{\beta=1}^n \mu_\beta v_\beta(x) \Delta_\mu^{(\beta)}(g, z)$$

formula yordamida aniqlanadi.

Keyingi izlanishlarda qulaylik uchun $\text{supp}\{v(\cdot)\}$ orqali $v(\cdot)$ funksiya tashuvchisini, $\text{mes}(\Omega)$ orqali esa $\Omega \subset \mathbb{T}^d$ to'planning Lebeg o'lchovini belgilaymiz.

H_μ operatorning ba'zi spektral xossalarini o'rganish maqsadida bu operator bilan bir qatorda chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma bo'lgan $H_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \dots, n$ operatorlarni qaraymiz. Ular $L_2(\mathbb{T}^d)$ Hilbert fazosida

$$H_{\mu_\alpha}^{(\alpha)} = H_0 - \mu_\alpha V_\alpha$$

kabi aniqlangan operatorlardir.

1-tasdiq. Agar $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ indekslar uchun

$$\text{mes}(\text{supp}\{v_\alpha(\cdot)\} \cap \text{supp}\{v_\beta(\cdot)\}) = 0 \quad (6)$$

shart bajarilsa, u holda $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ soni H_μ operatorning xos qiymati bo'lishi uchun bu son $H_{\mu_1}^{(1)}, \dots, H_{\mu_n}^{(n)}$ operatorlardan kamida bittasi uchun xos qiymat bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Faraz qilaylik, (6) shart bajarilsin. U holda har bir fiksirlangan $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ soni va $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ indekslar uchun $I_{\alpha\beta}(z) = 0$ bo'ladi. Shu sababli

$$\Delta_\mu(z) = (1 - \mu_1 I_{11}(z)) \times \dots \times (1 - \mu_n I_{nn}(z))$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Ikkinchi tomondan $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ soni $H_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}$ operatorning xos qiymati bo'lishi uchun $\mu_\alpha I_{\alpha\alpha}(z) = 1$ bo'lishi zarur va yetarlidir. 1-teoremaga ko'ra $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ soni H_μ operatorning xos qiymati bo'lishi uchun $\Delta_\mu(z) = 0$ bo'lishi zarur va yetarlidir. Oxirgi ma'lumotlarni umumlashtirib, 1-tasdiq isbotini hosil qilamiz.

1-tasdiqdan quyidaginatija kelib chiqadi.

1-natija. Agar 1-tasdiq shartlari bajarilsa, u holda H_μ va $H_{\mu_1}^{(1)}, \dots, H_{\mu_n}^{(n)}$ operatorlarning diskret spektrlari orasida

$$\sigma_{\text{disc}}(H_\mu) = \sigma_{\text{disc}}(H_{\mu_1}^{(1)}) \cup \dots \cup \sigma_{\text{disc}}(H_{\mu_n}^{(n)})$$

kabi munosabat o'rinlidir.

H_μ operatorning diskret spektri uchun olingan 1-natija bu operator xos qiymatlarining soni, joylashuv o'rni va mavjudlik shartlarini o'rganishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Agar (6) shart bajarilsa, u holda sodda hisoblashlar yordamida barcha $\beta \in \{1, \dots, n\}$ indeks, $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ soni va $g \in L_2(\mathbb{T}^d)$ elementlar uchun

$$\frac{\Delta_\mu^{(\beta)}(g, z)}{\Delta_\mu(z)} = \frac{J_g^{(\beta)}(z)}{1 - \mu_\beta I_{\beta\beta}(z)}$$

tenglik bajarilishini ko‘rsatish mumkin. Shu sababli, agar (6) shart bajarilsa, u holda H_μ operatorga mos $R_z(H_\mu)$ rezolventa operatori $L_2(\mathbb{T}^d)$ Hilbert fazosida

$$(R_z(H_\mu)g)(x) = \frac{g(x)}{u(x) - z} + \frac{1}{u(x) - z} \sum_{\beta=1}^n \frac{\mu_\beta v_\beta(x)}{1 - \mu_\beta I_{\beta\beta}(z)} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v_\beta(t)g(t)}{u(t) - z} dt$$

formula yordamida aniqlanadi.

Xulosa. Mazkur maqolada d o‘lchamli panjarada ikki zarrachali sistemaga mos Fridriks modeli tipidagi operatorning spektri va rezolventasi o‘rganilgan. Dastlab model operatorga mos Fredgolm determinanti aniqlangan. Uning nollari soni va joylashuv o‘rni tavsiflangan. Qaralayotgan model operatorning muhim va diskret spektrlari topilgan. Ta’sirlashish parametrlarining ishorasidan bog‘liq ravishda xos qiymatlarning joylashuv o‘rni o‘zgarishi bayon qilingan. Rezolventa operatori uchun ta’sir formulasi keltirib chiqarilgan. O‘rganilayotgan operatorning parametr funksiyalariga qo‘yilgan ba’zi tabiiy shartda (maxsus hol) uning diskret spektrini o‘rganish masalasi nisbatan sodda ko‘rinishga ega Fridriks modeli tipidagi modellarning diskret spektrlarini o‘rganish masalasiga keltirilgan. Shu bilan bir qatorda mazkur maxsus holda rezolventa operatori ham tadqiq qilingan.

ADABIYOTLAR

1. М. Рид, Б. Саймон, Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов, Москва: Мир, 1982.
2. Г. М. Жислин, Исследование спектра оператора Шредингера для системы многих частиц, Труды Московского математического общества, 9 (1960), 81–120.
3. W. Hunziker, On the spectra of Schrodinger multi-particle Hamiltonians, Helvetica Physica Acta, 39 (1966), 451–462.
4. С. Н. Лакаев, М. Э. Муминов, Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке, Теоретическая и математическая физика, 135:3, (2003), 478–503.
5. S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schrodinger operators on lattices, Mathematische Nachrichten, 280:7 (2007), 699–716.
6. S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, On the number of eigenvalues of a model operator associated to a system of three-particles on lattices, Russian Journal of Mathematical Physics, 14:4 (2007), 377–387.
7. S. Albeverio, S. N. Lakaev, R. Kh. Djumanova, The essential and discrete spectrum of a model operator associated to a system of three identical quantum particles, Reports on Mathematical Physics, 63:3 (2009), 359–380.
8. Т. Х. Расулов, Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке, Теоретическая и математическая физика, 163:1 (2010),

9. Т. Х. Расулов, Существенный спектр одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке, Теоретическая и математическая физика, 166:1 (2011), 95–109.
10. T. H. Rasulov, B. I. Bahronov. Existence of the eigenvalues of a tensor sum of the Friedrichs models with rank 2 perturbation. *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, 14:2 (2023), pp. 151–157.
11. Б. И. Бахронов, Т. Х. Расулов, М. Рехман. Условия существования собственных значений трехчастичного решетчатого модельного гамильтониана. *Известия вузов. Математика.* (2023), С. 3–12.
12. O. M. Norqulov. Panjaradagi ikki zarrachali sistemaga mos model operatorlarni xos qiymatlari. *BuxDU ilmiy axboroti.* 105:11 (2023), 69–74 b.

РЕЗЮМЕ

В статье изучена линейный, ограниченный и самосопряженный оператор типа модели Фридрикса, соответствующий системе двух частиц на d мерной решетке. Описаны существенный и дискретный спектры этого оператора. Построен соответствующий резольвента оператора. При некотором естественном условии (специальном случае), наложенном на параметр-функции оператора, изучались его дискретный спектр и резольвентный оператор.

Ключевые слова: решетка, частица, модель Фридрикса, определитель Фредгольма, существенный спектр, дискретный спектр, резольвента оператора.

RESUME

In this paper we study the linear, bounded and self-adjoint Friedrichs model type operator corresponding to two-particle system on a d dimensional lattice. The essential and discrete spectra of this operator are described. The resolvent operator is constructed. Under some natural condition (special case) imposed on the parameter functions of the operator, its discrete spectrum and resolvent operator were studied.

Key words: lattice, particle, Friedrichs model, Fredholm determinant, essential spectrum, discrete spectrum, resolvent operator.

UDK 517.98

**THE CENTER-VALUED QUASITRACES ON A FINITE REAL
AW*-ALGEBRAS**

Rakhimov A. A., Rakhmonova N. V. *

RESUME

In this paper real AW*-algebras are considered. It is proved the existence and uniqueness of the centervalued quasitrace on finite real AW*-algebras in analog to the center-valued trace on finite real von Neumann algebras.

Key words: Real and complex AW*- algebras; center-valued dimension function, center-valued quasitraces

Let $B(H)$ be the algebra of all bounded linear operators on a complex Hilbert space H . A weakly closed *-subalgebra M containing the identity operator $\mathbf{1}$ in $B(H)$ is called a *W*-algebra*. A weakly closed *-subalgebra $R \subset B(H)$ with the identity $\mathbf{1}$ is called a *real W*-algebra*, if it is weakly closed and $R \cap iR = \{0\}$.

Let A be a Banach *-algebra over the field \mathbb{C} . The algebra A is called a *C*-algebra*, if $\|aa^*\| = \|a\|^2$, for any $a \in A$. A real Banach *-algebra R is called a *real C*-algebra*, if $\|xx^*\| = \|x\|^2$ and an element $\mathbf{1} + xx^*$ is invertible for any $x \in R$. It is easy to see that R is a real C*-algebra if and only if a norm on R can be extended onto the complexification $A = R + iR$ of the algebra R so that algebra A is a C*-algebra (see [4], [5]).

To motivate the next definitions, suppose A is a *-ring with unity, and let w be a partial isometry in A . If $e = w^*w$, it results from $w = ww^*w$ that $wy = 0$ iff $ey = 0$ iff $(1 - e)y = y$ iff $y \in (1 - e)A$, thus the elements that right-annihilate w form a principal right ideal generated by a projection. If S is a nonempty subset of A , we write $R(S) = \{x \in A : sx = 0, \forall s \in S\}$ and call $R(S)$ the *right-annihilator* of S . Similarly, the set $L(S) = \{x \in A : xs = 0, \forall s \in S\}$ denotes the left-annihilator of S . A *Baer *-ring* is a *-ring A such that, for every nonempty subset S of A , $R(S) = gA$ for a suitable projection g . It follows that $L(S) = (R(S^*))^* = (hA)^* = Ah$ for a suitable projection h . A real (resp. complex) *AW*-algebra* is a real (resp. complex) C*-algebra that is a Baer *-ring (for more details see [1]). It is known that, every W*-algebra is an AW*-algebra. The converse of it was shown to be false by J. Dixmier, who showed that exist commutative AW*-algebras that cannot be represented (*-isomorphically) as W*-algebras on any Hilbert space.

An W*- or AW*- algebra is called a *factor* if its center is trivial. It is known that investigation of general W*-algebras can be reduced to the case of W*-factors, which are classified into types I, II and III. More precisely, any W*-algebra has a unique decomposition along its center into the direct sum of W*-factors of the I_{fin} , I_∞ , II_1 , II_∞ and III types. Similarly, AW*-factors are classified by types I, II and III and any AW*-algebra also has a unique decomposition along its center into the direct sum of AW*-factors of the I_{fin} , I_∞ , II_1 , II_∞ and III types.

***Rakhimov A. A., Rakhmonova N. V.** – National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, rakhimov@ktu.edu.tr; Kokand University, rakhmonovanilufar406@gmail.com

Let A be a real or complex AW*-algebra and $x \in A$ an arbitrary element. The *right support projection* of x is the projection $RP(x) \in A$ such that (i) $xRP(x) = x$ and (ii) $xy = 0$ if and only if $RP(x)y = 0$. For every $x \in A$, the right support projection exists and is unique. The *left support projection* of x is defined similarly, and it exists and is also unique. Now, let $x \in A_{sa}$ be a self-adjoint element, $\lambda \in \mathbb{R}$ and $E_{(\lambda, \infty)}(a) := RP((x - \lambda \mathbf{1})_+) = LP((x - \lambda \mathbf{1})_+)$. Then $E_{(\lambda, \infty)}(a) \in A$ and it is the spectral projection of a , corresponding to the interval (λ, ∞) (see [Remark 1.5][3]).

Definition 1 [9]. Let A be a unital C*-algebra. A *1-quasitrace* τ on A is a function $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ which satisfies:

- (i) $\tau(x^*x) = \tau(xx^*) \geq 0$, $x \in A$;
- (ii) $\tau(a + ib) = \tau(a) + i\tau(b)$, for $a, b \in A_{sa}$, where $A_{sa} = \{a \in A : a^* = a\}$;
- (iii) τ is linear on every abelian C*-subalgebra B of A ;

Furthermore, τ is called a n -quasitrace ($n \geq 2$) if there exists a 1-quasitrace τ_n on $M_n(A) = A \otimes M_n(\mathbb{C})$ such that

$$(iv) \tau(x) = \tau_n(x \otimes e_{11}), \quad x \in A,$$

where $(e_{ij})_{i,j=1}^n$ denote the matrix units of $M_n(\mathbb{C})$ and A_{sa} is a self-adjoint part of algebra A . Moreover τ is called normalized if $\tau(\mathbf{1}) = 1$. The set of normalized quasitraces on A is denoted by $QT(A)$. Recall that if A is an AW*-algebra, then the conditions (i), (ii), (iii) imply (iv).

Blackadar and Handelmann proved (cf. [10]), that a 2-quasitrace on a unital C*-algebra A is automatically an n -quasitrace for all $n \in \mathbb{N}$. Moreover, they showed that if Kaplansky's problem has an affirmative answer, then every 2-quasitrace on a unital C*-algebra A is a trace. In [9] proved that every 2-quasitrace on a unital exact C*-algebra A is a trace. In particular, this holds for every unital nuclear C*-algebra A and every unital C*-subalgebra A of a nuclear C*-algebra. Quasitraces (or more precisely 2-quasitraces) have become an important tool in the classification theory of C*-algebras. It was proved that every stably finite unital C*-algebra has a 2-quasitrace. If τ is a faithful quasitrace on A , then $d_\tau(x, y) = \|x - y\|_2^{2/3}$ ($x, y \in A$) is a metric on A , where $\|a\|_2 = \tau(a^*a)^{1/2}$ ($a \in A$). In [9] also proved that if M is a finite AW*-algebra with a faithful normal quasitrace τ and A is unital C*-subalgebra of M , then the d_τ -closure of A in M is the smallest AW*-subalgebra of M containing A . Recall that a unital C*-algebra A is called finite if every isometry is a unitary, i.e. that for $v \in A$ with $v^*v = \mathbf{1}$ implies that $vv^* = \mathbf{1}$.

Now we define a real analogue of the notion of a quasitraces. Let R be a unital real C*-algebra. Unlike the complex case, in the real case the hermitian part of the algebras does not generate the algebra itself. There is also the skew-hermitian (skew-adjoint) part of the algebra. Exactly, any element of algebra is the sum of two elements, one of which is a hermitian element, and the other is a skew-hermitian element: $x = \frac{x+x^*}{2} + \frac{x-x^*}{2}$. Therefore, we define the quasitrace as follows.

Definition 2. A *quasitrace* τ on R is a function $\tau : R \rightarrow \mathbb{R}$ which satisfies:

- (i') $\tau(x^*x) = \tau(xx^*) \geq 0, x \in R;$
(ii') $\tau(a+b) = \tau(a),$ for $a \in R_{sa}, b \in R_k,$ where $R_k = \{b \in R : b^* = -b\};$
(iii') τ is linear on every abelian C^* -subalgebra B of $R.$

The quasitrace on R can be extended to the enveloping C^* -algebra $A = R + iR,$ and conversely, the quasitrace on A can be constricted to $R.$ Namely, the following result can be proven directly.

Theorem 1. Let R be a unital real C^* -algebra and $A = R + iR$ be its enveloping C^* -algebra.

- 1) If τ is a quasitrace on $R,$ then the map $\tau_c : A \rightarrow \mathbb{C}$ defined as $\tau_c(x + iy) = \tau(x) + i\tau(y)$ is a quasitrace on $A,$ where $x, y \in R.$
- 2) If τ is a quasitrace on $A,$ then the map $\tau_r : R \rightarrow \mathbb{R}$ defined as $\tau_r(a + b) = \tau(a)$ is a quasitrace on $R,$ where $a \in R_{sa}, b \in R_k.$

It is a well-known that every finite von Neumann algebra M admits a center-valued trace $ctr : M \rightarrow \mathcal{Z}(M),$ and every trace on M is of the form $\varphi \circ ctr$ for a positive functional φ on $\mathcal{Z}(M).$ In this section we will construct a center-valued quasitrace for finite real AW^* -algebras with similar properties.

Let us recall some definitions. Let A be a $*$ -ring. For projections $e, f \in A,$ we write $e \lesssim f,$ and say that e is dominated by $f,$ in case $e \sim g \leq f,$ that is, e is equivalent to a subprojection of $f.$ Projections e and f are said to be 1) comparable if either $e \lesssim f$ or $f \lesssim e;$ 2) generalized comparable if there exists a central projection h such that $he \lesssim hf, (\mathbf{1} - h)f \lesssim (\mathbf{1} - h)e$ (when A has no unity element, the use of $\mathbf{1}$ is formal and the condition need not be symmetric in e and $f).$ We say that A has generalized comparability (briefly, A has GC) if every pair of projections is generalized comparable.

We write \mathcal{Z} for the center of $A.$ The projection lattice $\tilde{\mathcal{Z}}$ is a complete Boolean algebra; we write \mathcal{X} for its Stone representation space, and $C(\mathcal{X})$ for the algebra of continuous functions on $\mathcal{X};$ thus \mathcal{X} is a Stonian space, $\tilde{\mathcal{Z}}$ may be identified with the complete Boolean algebra of clopen sets in $\mathcal{X},$ and $C(\mathcal{X})$ is a commutative AW^* -algebra (see [1]).

Definition 3. A (finite) *dimension function* for A is a function $e \rightarrow D(e)$ defined on the set $P(A)$ of projections of $A,$ with values in $C(\mathcal{X}),$ such that

- (D1) $e \sim f$ implies $D(e) = D(f),$
- (D2) $D(e) \geq 0,$
- (D3) $D(h) = h,$ when h is central,
- (D4) $ef = 0$ implies $D(e + f) = D(e) + D(f).$

The main ingredient to construct the center-valued quasitrace is the following theorem from [1]

Theorem 2. ([Theorem 1, §33.][1]) If A is any finite Baer $*$ -ring with GC, there exists a unique dimension function D for $A.$ Moreover, D is completely additive, i.e. $\sum D(e_i) = D(e),$ where $(e_i)_{i \in I}$ is an orthogonal family of projections in $A,$ and $e = \sup e_i.$

Recall that in [Chapter 6][1] it is considered real-valued functions on $\mathcal{X}.$ According to [Corollary 4.6][11], every real AW^* -algebra satisfy the axiom (GC), therefore, from Theorem 2

we have the following result

Theorem 3. R be a finite real AW*-algebra. Then, there exists a unique center-valued dimension function $D : P(R) \rightarrow \mathcal{Z}(R)$ defined on the set of projections of R , satisfying:

- 1) $p \sim q$ if and only if $D(p) = D(q)$;
- 2) $p \lesssim q$ if and only if $D(p) \leq D(q)$;
- 3) $0 \leq D(p) \leq 1$;
- 4) $D(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;
- 5) if $p \perp q$, then $D(p + q) = D(p) + D(q)$;
- 6) if h is a central projection, then $D(hp) = hD(p)$, for $p \in P(R)$;
- 7) if $(p_i)_{i \in I}$ is families of all orthogonal projections, then $D(\sup_{i \in I} p_i) = \sum_{i \in I} D(p_i)$.

Now we will prove the main theorem of the article. To do this, we use the scheme of the proof of [Theorem 1.27][3], which can easily be applied to real AW*-algebras.

Theorem 4. Let R be a finite real AW*-algebra. Then, there exists a unique center-valued quasitrace $T : R \rightarrow \mathcal{Z}(R)$ with the following properties:

- 1) T is linear on commutative real C*-subalgebras;
- 2) $T(a + b) = T(a)$, for $a \in R_{sa}$, $b \in R_k$;
- 3) $T(x^*x) = T(xx^*) \geq 0$;
- 4) $T(x^*x) = 0$ if and only if $x = 0$;
- 5) $T|_{P(R)} = D$, where D is the center-valued dimension function from the previous theorem;
- 6) $T(hx) = hT(x)$, for all self-adjoint $h \in \mathcal{Z}(R)$ and for all $x \in R$;
- 7) $T|_{\mathcal{Z}(R)} = id_{\mathcal{Z}(R)}$;
- 8) T is order-preserving on R_{sa} ;
- 9) T is continuous in norm, in particular, $\|T(x) - T(y)\| \leq 2\|x - y\|$, for all $x, y \in R$.

Proof. Let $a = \sum_{k=1}^n \alpha_k p_k$ be a self-adjoint element with finite spectrum, so we have that $\alpha_k \in \mathbb{R}$, for all $k \in \{1, \dots, n\}$ and the p_k are mutually orthogonal projections in R , and define $T(a) := \sum_{k=1}^n \alpha_k D(p_k)$.

Firstly, we will show that $T(a + b) = T(a) + T(b)$ for two self-adjoint, commuting elements with finite spectrum. So, we observe, that $a + b$ is also self-adjoint with finite spectrum: suppose that $a = \sum_{k=1}^n \alpha_k p_k$ and $b = \sum_{j=1}^m \beta_j q_j$. Then all p_k 's commute with all q_j 's, thus is again a projection for all k and j . Hence we have

$$\begin{aligned} a + b &= \sum_{k=1}^n \alpha_k p_k + \sum_{j=1}^m \beta_j q_j \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k (p_k - \sum_{j=1}^m p_k q_j) + \sum_{i=1}^m \beta_i (q_i - \sum_{l=1}^n p_l q_i) + \sum_{o=1}^n \sum_{r=1}^m (\alpha_o + \beta_r) p_o q_r, \end{aligned}$$

where all the projections $(p_k - \sum_{j=1}^m p_k q_j)$, $(q_i - \sum_{l=1}^n p_l q_i)$, $p_o q_r$ are mutually orthogonal. So now, we can compute $T(a + b)$

$$\begin{aligned}
T(a+b) &= \\
&= T\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \left(p_k - \sum_{j=1}^m p_k q_j\right) + \sum_{i=1}^m \beta_i \left(q_i - \sum_{l=1}^n p_l q_i\right) + \sum_{o=1}^n \sum_{r=1}^m (\alpha_o + \beta_r) p_o q_r\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \alpha_k T\left(p_k - \sum_{j=1}^m p_k q_j\right) + \sum_{i=1}^m \beta_i T\left(q_i - \sum_{l=1}^n p_l q_i\right) + \sum_{o=1}^n \sum_{r=1}^m (\alpha_o + \beta_r) T(p_o q_r) \\
&= \sum_{k=1}^n \alpha_k T(p_k) + \sum_{i=1}^m \beta_i T(q_i) = T(a) + T(b).
\end{aligned}$$

Since all the spectral projections of a commute, we can compute

$$T(a) = \int D(E_{(\lambda, \infty)}(a)) d\lambda,$$

where we interpret the integral as a Riemann integral. Now we want to show that T is order-preserving on self-adjoint elements with finite spectrum. For that, let $0 \leq a \leq b$, then by [Lemma 1.24][3] we have

$$T(a) = \int D(E_{(\lambda, \infty)}(a)) d\lambda \leq \int D(E_{(\lambda, \infty)}(b)) d\lambda = T(b).$$

Now, we can show the continuity of T . Let $a, b \in R$ again self-adjoint elements with finite spectrum. Then the following implications hold: $-\|a-b\|\mathbf{1} \leq a-b \leq \|a-b\|\mathbf{1}$, i.e. $b - \|a-b\|\mathbf{1} \leq a \leq \|a-b\|\mathbf{1} + b$, and then $T(b - \|a-b\|\mathbf{1}) \leq a \leq T(b + \|a-b\|\mathbf{1})$. Since $\|a-b\|\mathbf{1}$ and b commute, and $T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, we obtain $\|T(a) - T(b)\| \leq \|a-b\|$.

Now we can define T for all self-adjoint elements. Let $a \in R$ be a self-adjoint element. R has real rank zero, hence, there exists a sequence of self-adjoint elements with finite spectrum $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, which converge in norm to a . The sequence $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence, thus with the inequality above $(T(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence, and so it converges in norm. We can define $T(a) := \lim_{n \rightarrow \infty} T(a_n)$. The next step is to show the independence of the chosen sequence. If $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is another sequence of self-adjoint elements with finite spectrum which converges to a in norm, then we have the following inequality:

$$\|T(a_n) - T(b_n)\| \leq \|a_n - b_n\| \leq \|a_n - a\| + \|a - b_n\|.$$

So, we have the independence from the chosen sequence.

Let $x \in R$ be an arbitrary element. We can decompose x into its self-adjoint and skew-adjoint parts $a \in R_{sa}$ and $b \in R_k$ as $x = a + b$, and then define

$$T(x) = T(a + b) := T(a).$$

Now let $a, b \in R$ be two commuting self-adjoint elements. Then there are sequences $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in the commutative real AW*-subalgebra $\{a, b\}''$, generated by a and b , which converge to a and b , respectively. Then it is clear that $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is again a self-adjoint sequence with finite spectrum, it converges to $a + b$, and we see that $T(a_n + b_n) = T(a_n) + T(b_n)$

for every $n \in \mathbb{N}$, because a_n and b_n commute for every $n \in \mathbb{N}$. We see the additivity of T on the commuting self-adjoint elements.

Let now B be a commutative real C^* -subalgebra of R and $x, y \in B$. Then $x = a + b$, $y = c + d$ with $a, c \in B_{sa}$, $b, d \in B_k$. Since $a + c \in B_{sa}$ and $b + d \in B_k$ we obtain

$$T(x + y) = T((a + c) + (b + d)) = T(a + c) = T(a) + T(c) = T(x) + T(y).$$

Now we want to show that $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$ and all $x \in R$. It is easy to see that $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ if $\lambda \in \mathbb{R}$ and x is a self-adjoint element. Let $x \in R$ be an arbitrary element and $x = a + b$, where $a \in R_{sa}$ and $b \in R_k$. Then

$$T(\lambda x) = T(\lambda a + \lambda b) = T(\lambda a) = \lambda T(a) = \lambda T(x).$$

So, we have shown the first property of T , namely that T is linear on commutative subalgebras.

Now we want to prove the tracial property of T . For that, it is first clear that $T(x^*x) \geq 0$. We again use the equality $T(x^*x) = \int \mathcal{D}(E_{(\lambda, \infty)}(x^*x))d\lambda$. We now use [Lemma 1.25][3] and get the desired property:

$$T(x^*x) = \int D(E_{(\lambda, \infty)}(x^*x))d\lambda = \int D(E_{(\lambda, \infty)}(xx^*))d\lambda = T(xx^*)$$

In the next step, we want to prove property 6). If $h \in \mathcal{Z}(R)$ and $x \in R$ are both self-adjoint elements with finite spectrum, then it is clear that $T(hx) = hT(x)$ since D has the property. The general case then follows because from [4], we know that the center $\mathcal{Z}(R)$ of R is also an real AW*-algebra, and we can approximate every self-adjoint $h \in \mathcal{Z}(R)$ with self-adjoint elements with finite spectrum in $\mathcal{Z}(R)$. The proof is complete.

The Theorem 4 can also be proven using the method of transition to the enveloping (complex) C^* -algebra. Namely the following theorem is true

Theorem 5. Let R be a unital real C^* -algebra and $A = R + iR$ be its enveloping C^* -algebra.

- 1) If T is a center-valued quasitrace on R , then the map $T_c : A \rightarrow \mathcal{Z}(A)$ defined as $T_c(x + iy) = T(x) + iT(y)$ is a center-valued quasitrace on A , where $x, y \in R$.
- 2) If T is a center-valued quasitrace on A , then the map $T_r : R \rightarrow \mathcal{Z}(R)$ defined as $T_r(a + b) = T(a)$ is a center-valued quasitrace on R , where $a \in R_{sa}$, $b \in R_k$.

Theorem 5 can be proved as well as Theorem 1 directly. Now the proof of Theorem 4 follows directly from Theorem 5 and [Theorem 1.27][3].

REFERENCES

1. Berberian2011 Berberian S. K., *Baer *-rings*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 195, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. (2011), 309p.
2. Ayupov2004 Ayupov Sh A, Real AW*-algebras of type I, *Funct. Anal. Appl.* 38(3), 302–304 (2004)

3. Fehlker2018 Fehlker F, Quasitrace abd AW^* -bundles, Monster, 20–25 (2018)
4. Ayupov2010 Ayupov Sh. A. and Rakhimov A. A., *Real W^* -algebras, Actions of groups and Index theory for real factors*, VDM Publishing House Ltd. Beau-Bassin, Mauritius. (2010), 138p.
5. Ayupov97 Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A. and Usmanov Sh .M., *Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras*, Kluw.Acad.Pub.,MAIA. 418, (1997), 235p.
6. Rakhimov2018 Rakhimov A. A. and Nurillaev M. E., *On property of injectivity for real W^* -algebras and JW -algebras*, Positivity. 22, 1345–1354 (2018)
7. Li1992 Li B.R. Introduction to Operator Algebras. World Sci. Singapore, pp. 237–256 (1992)
8. Li2003 Li B.R. Real operator algebras. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 241p. (2003)
9. Haagerup2014 Haagerup U. Quasitraces on exact C^* -algebras are traces. C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. 36(2-3), 67–92 (2014)
10. Blackadar1982 Blackadar B. and D. Handelman, Dimension functions and traces on C^* -algebra, J. Funct. Anal. 45, 297–340 (1982)
11. Ayupov2002 Albeverio S., Ayupov Sh.A., Abduvaitov A.H. On real AW^* -algebras, Preprint no. 37, SFB 611, Bonn (2002)

REZYUME

Ushbu maqolada haqiqiy AW^* -algebralari ko'rib chiqiladi. Haqiqiy fon Neumann algebralarini markaziy qiymatli sledlari kabi haqiqiy AW^* -algebralar uchun markaziy qiymatli kvazisledlarni mavjudligi va yaqonaligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: Haqiqiy va kompleks AW^* -algebralar; markaz qiymatli o'lchov funksiyasi, markaziy qiymatli kvazisledlar.

РЕЗЮМЕ

В данной статье рассматриваются вещественные AW^* -алгебры. Аналогично центра-значному следу на конечных вещественных алгебрах фон Неймана, доказано существование и единственность центра-значного квазиследа на конечных вещественных AW^* -алгебрах.

Ключевые слова: Вещественные и комплексные AW^* -алгебры; центральная функция размерности, центра-значный квазиследы

UDC 517.956.22

APPELL HYPERGEOMETRIC FUNCTION WITH APPLICATIONS TO THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE THREE-DIMENSIONAL BI-AXIALLY SYMMETRIC SINGULAR ELLIPTIC EQUATION

Tulakova Z. R. *

RESUME

In the present work, a spatial mixed problems and Neumann problem for a three-dimensional elliptic equation with two singular coefficients are investigated. Using an "abc" method, the uniqueness for the solution of the mixed problems is proved. It is shown that the solution to the Neumann problem is not unique and each solution differs from the other with a constant. Applying a method of Green's functions, we are able to find the solution of the problem in an explicit form, in finding which the properties of the Appel and Gauss hypergeometric functions are essentially used.

Key words: Spatial mixed problem, Neumann problem, three-dimensional singular elliptic equation, Green's function, Gauss and Appell's hypergeometric functions.

Introduction

It is known that the theory of boundary value problems for degenerate equations and equations with singular coefficients is one of the rapidly developing parts of the modern theory of partial differential equations, which is encountered in solving many important questions of an applied nature, for example, [1]. Omitting a huge bibliography in which various local and non-local boundary-value problems for mixed-type equations containing elliptic equations with singular coefficients are studied, we note some papers which are close to the present work. In the works [2, 3, 4] fundamental solutions were constructed for the multidimensional elliptic equations with the several singular coefficients, and in [5, 6, 7] the explicit solutions of the Dirichlet, Holmgren and generalized Holmgren problems in the hyperoctant of the ball were found. In the works [8, 9, 10], explicit solutions in the infinite domains of similar problems for the same equation were obtained. In the above-mentioned works [5, 6, 7], the author managed to find solutions to the problems posed when the value of the sought solution on a part of the multidimensional sphere was known in advance.

If on the part of the sphere enclosed between the lateral faces of the hyperoctant a normal derivative is specified, on one of the lateral faces a value, and on the other faces either the value itself or the normal derivative of the desired solution, then such a problem is called a mixed problem, the study of which is devoted to relatively few works. Smirnov [11] (see, also [12]) was one of the first to solve a mixed problem for the equation

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\alpha}{x}u_x = 0, \quad x > 0, \quad 0 < 2\alpha < 1.$$

***Tulakova Z. R.** – Fergana branch of the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khorazmi, ziyodacoders@gmail.com

In the recent work [13] a mixed problem for the equation

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x = 0, \quad 0 < 2\alpha < 1.$$

in a hemisphere $R_3^+ = \{(x, y, z) : x > 0\}$ of three-dimensional Euclidean space. In this paper we find explicit solution to the mixed problem for the equation

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y = 0, \quad 0 < 2\alpha, 2\beta < 1 \quad (1)$$

a fundamental solutions of which in the domain

$$\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, -\infty < z < +\infty\}$$

are found in [14] (see, also [3]).

Note, that for the equation (1) spatial boundary problems with the Dirichlet and Dirichlet-Neumann conditions on the lateral faces of the quarter of the ball are found in [14, 15].

Formulation of the problems

Let $\Omega \subset R^+ \times R^+ \times R$ be a finite simple-connected domain bounded by planes $x = 0$, $y = 0$ and by a smooth surface S . The intersections of this surface with planes $x = 0$, $y = 0$ are denoted by γ_1 , γ_2 , respectively. Designate as the domain Ω_1 , a plane $y - z$, bounded by $x = 0$ ($0 < y < b$, $-c < z < d$) and by a curve $\gamma_1 : x = f_1(y, z)$. Ω_2 is domain in the plane $x - z$ bounded by $y = 0$ ($0 < x < a$, $-c < z < d$), $\gamma_2 : y = f_2(x, z)$. Here a , b , c , d are positive constants.

Problem DNM. To find a function $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, satisfying Eq. (1) and conditions

$$u(0, y, z) = \tau_1(y, z), \quad (y, z) \in \bar{\Omega}_1, \quad (2)$$

$$y^{2\beta} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \nu_2(x, z), \quad (x, z) \in \Omega_2, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S, \quad (4)$$

where $\tau_1(y, z)$, $\nu_2(x, z)$, $\varphi(x, y, z)$ are given functions; n is an outer normal to S .

Problem DDM. To find a function $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, satisfying Eq. (1), conditions (2) and (4), and condition

$$u(x, 0, z) = \tau_2(x, z), \quad (x, z) \in \bar{\Omega}_2, \quad (5)$$

where $\tau_1(y, z)$, $\tau_2(x, z)$, $\varphi(x, y, z)$ are given functions fulfilling the following matching conditions: $\tau_1(0, z) = \tau_2(0, z)$, $-c < z < d$.

Neumann problem. To find a function $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, satisfying Eq. (1), conditions (3) and (4), and condition

$$x^{2\alpha} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \nu_1(y, z), \quad (y, z) \in \Omega_1,$$

where $\nu_1(y, z)$, $\nu_2(x, z)$, $\varphi(x, y, z)$ are given functions.

The uniqueness of the solution of the problems

Consider the problem DNM. One can readily check the validity of the following relation

$$\begin{aligned} x^{2\alpha}y^{2\beta} [uH_{\alpha,\beta}(w) - wH_{\alpha,\beta}(u)] &= y^{2\beta} \frac{\partial}{\partial x} [x^{2\alpha}(uw_x - wu_x)] + \\ &+ x^{2\alpha} \frac{\partial}{\partial y} [y^{2\beta}(uw_y - wu_y)] + x^{2\alpha}y^{2\beta} \frac{\partial}{\partial z} [uw_z - wu_z]. \end{aligned}$$

Let Ω_ε be a sup-domain of Ω at a distance $\varepsilon > 0$ from its boundary

$$\partial\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup S$$

and

$$\cos(n, x)d\sigma = dydz, \quad \cos(n, y)d\sigma = dx dz, \quad \cos(n, z)d\sigma = dx dy,$$

where n is the outer normal to $\partial\Omega$.

Integrate both sides of above given equality on the domain Ω_ε and use the classical formula of Gauss-Ostrogradsky:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_\varepsilon} x^{2\alpha}y^{2\beta} [uH_{\alpha,\beta}(w) - wH_{\alpha,\beta}(u)] dx dy dz &= \\ &= \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} x^{2\alpha}y^{2\beta} [(uw_x - wu_x) \cos(n, x) + \\ &+ (uw_y - wu_y) \cos(n, y) + (uw_z - wu_z) \cos(n, z)] d\sigma. \end{aligned}$$

Using the equality

$$\begin{aligned} x^{2\alpha}y^{2\beta} [uH_{\alpha,\beta}(u) + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] &= (x^{2\alpha}y^{2\beta}uu_x)_x + \\ &+ (x^{2\alpha}y^{2\beta}uu_y)_y + (x^{2\alpha}y^{2\beta}uu_z)_z, \end{aligned}$$

we obtain

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_\varepsilon} x^{2\alpha}y^{2\beta} uH_{\alpha,\beta}(u) dx dy dz + \iiint_{\Omega_\varepsilon} x^{2\alpha}y^{2\beta} [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] dx dy dz &= \\ &= \iiint_{\Omega_\varepsilon} [(x^{2\alpha}y^{2\beta}uu_x)_x + (x^{2\alpha}y^{2\beta}uu_y)_y + (x^{2\alpha}y^{2\beta}uu_z)_z] dx dy dz. \end{aligned}$$

Applying again the formula of Gauss-Ostrogradsky to this equality and letting $\varepsilon \rightarrow 0$, in the case of the problem DNM we get

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x^{2\alpha}y^{2\beta} [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] dx dy dz &= \iint_{\Omega_1} y^{2\beta} \tau_1(y, z) f_1(y, z) dy dz + \\ &+ \iint_{\Omega_2} x^{2\alpha} \nu_2(x, z) f_2(x, z) dx dz + \iint_S u \varphi d\sigma, \end{aligned} \quad (6)$$

where

$$f_1(y, z) = x^{2\alpha} u_x(x, y, z)|_{x=0}$$

$$(y, z) \in \Omega_1; \quad f_2(x, z) = u(x, y, z)|_{y=0}, \quad (x, z) \in \bar{\Omega}_2.$$

To prove the uniqueness of the solution, as usual, we suppose that the problem has two ν, w solutions. Denoting $u = \nu - w$ we have that u satisfies homogeneous problem DNM ($\tau_1 = 0, \nu_2 = 0, \varphi = 0$). Further we have to prove that the homogeneous problem has only trivial solution. In this case from (6) one can easily get

$$\iiint_{\Omega} x^{2\alpha} y^{2\beta} [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] dx dy dz = 0. \quad (7)$$

Hence, it follows that $u_x = u_y = u_z = 0$, which implies that u is a constant function. Considering homogeneous conditions (2)-(4), we conclude that $u(x, y, z) \equiv 0$, in Ω .

Thus, the solution to the problem DNM is unique, if it exists.

The proof of the uniqueness of the solution to the problem DDM is carried out in a similar way.

Now we study the question of the uniqueness of the solution to the Neumann problem.

Repeating the above transformations, in the of the Neumann problem, we get

$$\iiint_{\Omega} x^{2\alpha} y^{2\beta} [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] dx dy dz = \iint_S u \varphi d\sigma +$$

$$+ \iint_{\Omega_1} y^{2\beta} \nu_1(y, z) g_1(y, z) dy dz + \iint_{\Omega_2} x^{2\alpha} \nu_2(x, z) g_2(x, z) dx dz, \quad (8)$$

where

$$g_1(y, z) = u(x, y, z)|_{x=0}, \quad (y, z) \in \bar{\Omega}_1; \quad f_2(x, z) = u(x, y, z)|_{y=0}, \quad (x, z) \in \bar{\Omega}_2.$$

Denoting again $u = \nu - w$ we have that u satisfies homogeneous Neumann problem ($\nu_1 = 0, \nu_2 = 0, \varphi = 0$). Further we have to prove that the homogeneous problem has only trivial solution. In this case from (8) one can easily get equality (7). Hence, it follows that $u_x = u_y = u_z = 0$, which implies that $u = C$, where C is a constant function.

Thus, the Neumann problem has an infinite number of solutions, if it exists, each of which differs from the other by a constant term: $\nu = w + C$, where v and w are some solutions of the Neumann problem.

Thus the following uniqueness theorem is proved:

Theorem 1.

- 1) The solution of the problem DNM is unique;
- 2) the solution of the problem DDM is unique;
- 3) the solution of the Neumann problem is not unique: each solution differs from the other by a constant term, if it exists.

Hypergeometric functions in one and two variables

With a view to introducing formally the Gaussian hypergeometric series and its generalizations, we recall here some definitions and identities involving the Gamma function $\Gamma(z)$ and Pochhammer's symbol $(\lambda)_n$.

The *Gamma function* $\Gamma(z)$ is defined by

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, & \operatorname{Re}(z) > 0, \\ \frac{\Gamma(z+1)}{z}, & \operatorname{Re}(z) < 0; \quad z \neq -1, -2, -3, \dots \end{cases} \quad (9)$$

The definition (9) was used by Euler and there are other definitions of the Gamma function (see, for instance, [16]).

Throughout this work we shall find it convenient to employ the *Pochhammer symbol* $(\lambda)_n$ defined by

$$(\lambda)_n = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 0, \\ \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1), & \text{if } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Since $(1)_n = n!$, $(\lambda)_n$ may be looked as a generalization of the elementary factorial; hence the symbol $(\lambda)_n$ is also referred to as the *factorial function*.

In terms of Gamma functions, we have

$$(\lambda)_n = \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)}, \quad \lambda \neq 0, -1, -2, \dots,$$

which can easily be verified.

The hypergeometric function of Gauss is defined inside the circle $|z| < 1$ as the sum of the hypergeometric series [16] :

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots$$

where a, b, c , are independent of z . We shall call a, b, c the parameters of the hypergeometric function; they are arbitrary complex numbers.

The great success of the theory of hypergeometric series in one variable has stimulated the development of a corresponding theory in two and more variables. Appell has defined, in 1880, four series, F_1 to F_4 which are all analogous to Gauss' $F(a, b; c; z)$.

The Appell hypergeometric function in two variables has a form [16, eq.5.7(7)]

$$F_2(a; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b_1)_m (b_2)_n}{m! n! (c_1)_m (c_2)_n} x^m y^n,$$

We give some elementary relations for F_2 necessary in this study:

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} F_2(a; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{m!n!(c_1)_m(c_2)_n} F_2(a+m+n; b_1+m, b_2+n; c_1+m, c_2+n; x, y), \\
&\frac{b_1}{c_1} x F_2(a+1; b_1+1, b_2; c_1+1, c_2; x, y) + \frac{b_2}{c_2} y F_2(a+1; b_1, b_2+1; c_1, c_2+1; x, y) \\
&= F_2(a+1; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) - F_2(a; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y), \\
&F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) \\
&= (1-x-y)^{-a} F_2\left(a, c_1-b_1, c_2-b_2; c_1, c_2; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right).
\end{aligned}$$

For a given Appell hypergeometric function F_2 , it is useful to find a decomposition formula which would express the double hypergeometric function in terms of products of several simpler hypergeometric functions involving fewer variables. The following expansion formula [17]

$$\begin{aligned}
F_2(a; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b_1)_k (b_2)_k}{k! (c_1)_k (c_2)_k} x^k y^k \times \\
&\times F(a+k, b_1+k; c_1+k; x) F(a+k, b_2+k; c_2+k; y)
\end{aligned} \tag{10}$$

is valid.

Note that each point of the line $x+y=1$ ($x>0, y>0$) can be a point of the logarithmic singularity of the function F_2 .

Lemma[18]. If x and y are positive and $\alpha > 0, \beta > 0$, then

$$F_2(\alpha + \beta, \alpha, \beta; 2\alpha, 2\beta; x, y) \sim -\frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + \beta)} \frac{\ln(1-x-y)}{x^\alpha y^\beta}$$

as $x+y \rightarrow 1-0$.

Let $c_1 > b_1, c_2 > b_2$ and $a+b_1+b_2=c_1+c_2$. If $x > 0$ and $y > 0$, then

$$F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) \sim -\frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)} \frac{\ln(1-x-y)}{x^{c_1-b_1} y^{c_2-b_2}}$$

as $x+y \rightarrow 1-0$.

If $c_1+c_2 < a+b_1+b_2$, then

$$\begin{aligned}
F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) &\sim \frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(a+b_1+b_2-c_1-c_2)}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)} \times \\
&\times x^{b_1-c_1} y^{b_2-c_2} (1-x-y)^{c_1+c_2-a-b_1-b_2}.
\end{aligned}$$

In addition, the fundamental solutions of the equation (1) are expressed in terms of the Appell hypergeometric function F_2 [18, 19]:

$$\begin{aligned}
q_1(x, y; \xi, \eta) &= k_1 r^{-1-2\alpha-2\beta} F_2\left(\frac{1}{2} + \alpha + \beta, \alpha, \beta; 2\alpha, 2\beta; \xi, \eta\right), \\
q_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0) &= k_2 r^{2\alpha+2\beta-3} (xx_0)^{1-2\alpha} \times
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\times F_2 \left(\frac{3}{2} - \alpha - \beta; 1 - \alpha, \beta; 2 - 2\alpha, 2\beta; \xi, \eta \right), \quad (12)$$

$$q_3(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = k_3 r^{2\alpha+2\beta-3} (yy_0)^{1-2\beta} \times \\ \times F_2 \left(\frac{3}{2} - \alpha - \beta; \alpha, 1 - \beta; 2\alpha, 2 - 2\beta; \xi, \eta \right), \quad (13)$$

$$q_4(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = k_4 r^{2\alpha+2\beta-5} (xx_0)^{1-2\alpha} (yy_0)^{1-2\beta} \times \\ \times F_2 \left(\frac{3}{2} - \alpha - \beta; 1 - \alpha, 1 - \beta; 2 - 2\alpha, 2 - 2\beta; \xi, \eta \right), \quad (14)$$

where

$$\xi = 1 - \frac{r_1^2}{r^2}, \quad \eta = 1 - \frac{r_2^2}{r^2}; \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, \\ r_1^2 = (x + \xi)^2 + (y - \eta)^2, \quad r_2^2 = (x - \xi)^2 + (y + \eta)^2.$$

These functions satisfy the equation (1), and by virtue of the Lemma , it is not difficult to prove that the functions $q_k(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) have a singularity of order $\frac{1}{r}$ at $r \rightarrow 0$ ($x > 0, y > 0$) and, therefore, the functions defined in (11)–(14) are a fundamental solutions of equation (1).

The existence of the solution of the problem DNM.

We prove the existence of the solution in a special case of the domain Ω in order to get the solution in an explicit form. Assume $R = a = b = c = d$ and let $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < R^2, x > 0, y > 0, -R < z < R\}$. We find a solution of considered problem using method of Green's functions [21]. Therefore, first we give a definition of Green's function for the formulated problem.

Definition. We call the function $G_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ as Green's function of the Problem DNM, if it satisfies the following conditions:

1. this function is a regular solution of Eq. (1) in the domain Ω , except at the point (x_0, y_0, z_0) . which is any fixed point of Ω ;
2. it satisfies boundary conditions

$$G_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0)|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} G_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \Big|_{y=0} = 0,$$

$$\frac{\partial G_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0)}{\partial n} \Big|_S = 0;$$

3. it can be represented as

$$G_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = q_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0) + \bar{q}_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0),$$

where $q_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ is the fundamental solution, defined in (12); a function

$$\bar{q}_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = - \left(\frac{a}{R_0} \right)^{3-2\alpha+2\beta} q_2(x, y, z; \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$$

is a regular solution of Eq.(1) in the domain Ω . Here,

$$\bar{x}_0 = \frac{a^2}{R_0^2}x_0, \quad \bar{y}_0 = \frac{a^2}{R_0^2}y_0, \quad \bar{z}_0 = \frac{a^2}{R_0^2}z_0, \quad R_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Excise a small ball with its center at (x_0, y_0, z_0) and with radius $\rho > 0$ from the domain Ω . Designate the sphere of the excised ball as C_ρ and by Ω_ρ denote the remaining part of Ω .

Applying formula (5), obtain

$$\begin{aligned} \iint_{C_\rho} x^{2\alpha}y^{2\beta} \left[u \frac{\partial G}{\partial n} - G_1 \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS &= \iint_{\Omega_1} y^{2\beta} \tau_1(y, z) G^*(0, y, z; x_0, y_0, z_0) dydz + \\ + \iint_{\Omega_2} x^{2\alpha} \nu_2(x, z) G(x, 0, z; x_0, y_0, z_0) dx dz &+ \iint_S G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \varphi(\sigma) d\sigma, \end{aligned} \quad (15)$$

where

$$G^*(0, y, z; x_0, y_0, z_0) = x^{2\alpha} \frac{\partial G(x, y, z; x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (y, z) \in \Omega_1.$$

It is known [14]:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \iint_{C_\rho} x^{2\alpha}y^{2\beta} u \frac{\partial G}{\partial n} dS, \quad \iint_{C_\rho} x^{2\alpha}y^{2\beta} G \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0. \quad (16)$$

Now from (15) and (16) we can write the solution of the problem DNM as follows:

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) &= \iint_{\Omega_1} y^{2\beta} \tau_1(y, z) G^*(0, y, z; x_0, y_0, z_0) dydz + \\ + \iint_{\Omega_2} x^{2\alpha} \nu_2(x, z) G(x, 0, z; x_0, y_0, z_0) dx dz &+ \iint_S G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \varphi(\sigma) d\sigma. \end{aligned} \quad (17)$$

The particular values of Green's function are given by

$$\begin{aligned} G^*(0, y, z; x_0, y_0, z_0) &= k_1(1 - 2\alpha)x_0^{1-2\alpha} \left[\frac{F(\beta_2, \beta, 2\beta; \eta_{0x})}{X_1^{3-2\alpha+2\beta}} - \frac{F(\beta_2, \beta, 2\beta; \bar{\eta}_{0x})}{Y_1^{3-2\alpha+2\beta}} \right], \\ G(x, 0, z; x_0, y_0, z_0) &= k_1(xx_0)^{1-2\alpha} \times \\ \times \left[\frac{F(\beta_2, 1 - \alpha, 2 - 2\alpha; \xi_{0y})}{X_2^{3-2\alpha+2\beta}} - \frac{F(\beta_2, 1 - \alpha, 2 - 2\alpha; \bar{\xi}_{0y})}{Y_2^{3-2\alpha+2\beta}} \right], \end{aligned}$$

where

$$\xi_{0y} = -\frac{4xx_0}{X_2^2}, \quad \eta_{0x} = -\frac{4yy_0}{X_1^2}, \quad \bar{\xi}_{0y} = -\frac{4a^2xx_0}{R_0^2Y_2^2}, \quad \bar{\eta}_{0x} = -\frac{4a^2}{R_0^2Y_1^2},$$

$$\begin{aligned}
X_1^2 &= x_0^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \\
X_2^2 &= (x - x_0)^2 + y_0^2 + (z - z_0)^2, \\
Y_1^2 &= \left(a - \frac{yy_0}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{zz_0}{a}\right)^2 + \frac{x_0^2 + z_0^2}{a^2}y^2 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{a^2}z^2 - a^2, \\
Y_2^2 &= \left(a - \frac{xx_0}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{zz_0}{a}\right)^2 + \frac{y_0^2 + z_0^2}{a^2}x^2 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{a^2}z^2 - a^2, \\
\beta_2 &= \frac{3}{2} - \alpha - \beta; \quad k_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(2 - 2\alpha + 2\beta)}{\Gamma(2 - 2\alpha)\Gamma(2\beta)\Gamma(1 - \alpha + \beta)}.
\end{aligned}$$

Now we can formulated our result as following:

Theorem 2. If $\tau_1(y, z) \in C^2(\Omega_1)$, $\nu_2(x, z) \in C^1(\Omega_2)$, $\varphi(x, y, z) \in C^1(S)$, then the problem DNM has unique solution represented by formula (17).

The existence of the solution of the problem DDM.

Using the fundamental solution $q_4(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$, defined in (14), one can solve the problem DDM.

Theorem 3. If $\tau_1(y, z) \in C^2(\bar{\Omega}_1)$, $\tau_2(x, z) \in C^2(\bar{\Omega}_2)$, $\varphi(x, y, z) \in C^1(S)$ then the problem DDM has unique solution represented by

$$\begin{aligned}
u(x_0, y_0, z_0) &= \iint_{\Omega_1} y^{2\beta} \tau_1(y, z) G^*(0, y, z; x_0, y_0, z_0) dy dz + \\
&+ \iint_{\Omega_2} x^{2\alpha} \tau_2(x, z) G^{**}(x, 0, z; x_0, y_0, z_0) dx dz + \iint_S G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \varphi(\sigma) d\sigma.
\end{aligned}$$

The particular values of Green's function are given by

$$\begin{aligned}
G^*(0, y, z; x_0, y_0, z_0) &= k_4(1 - 2\alpha)x_0^{1-2\alpha}(yy_0)^{1-2\beta} \times \\
&\times \left[\frac{F(\beta_4, 1 - \beta, 2 - 2\beta; \eta_{0x})}{X_1^{5-2\alpha-2\beta}} - \frac{F(\beta_4, 1 - \beta, 2 - 2\beta; \bar{\eta}_{0x})}{Y_1^{5-2\alpha-2\beta}} \right], \\
G^{**}(x, 0, z; x_0, y_0, z_0) &= k_4(1 - 2\beta)(xx_0)^{1-2\alpha}y_0^{1-2\beta} \times \\
&\times \left[\frac{F(\beta_4, 1 - \alpha, 2 - 2\alpha; \xi_{0y})}{X_2^{5-2\alpha-2\beta}} - \frac{F(\beta_4, 1 - \alpha, 2 - 2\alpha; \bar{\xi}_{0y})}{Y_2^{5-2\alpha-2\beta}} \right], \\
\beta_4 &= \frac{5}{2} - \alpha + \beta; \quad k_4 = \frac{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \beta)\Gamma(4 - 2\alpha - 2\beta)}{\Gamma(2 - 2\alpha)\Gamma(2 - 2\beta)\Gamma(2 - \alpha - \beta)}.
\end{aligned}$$

The proof of the Theorem is carried out in a similar way (for details, see [20]).

The existence of the solution of the Neumann problem.

Although the solution to the Neumann problem is not unique, using the fundamental solution $q_4(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$, defined in (11), this solution can be written out explicitly.

Theorem 4. If $\nu_1(y, z) \in C^2(\Omega_1)$, $\nu_2(x, z) \in C^1(\Omega_2)$, $\varphi(x, y, z) \in C^1(S)$, then the problem DNM has unique solution represented by

$$u(x_0, y_0, z_0) = C + \iint_{\Omega_1} y^{2\beta} \nu_1(y, z) G(0, y, z; x_0, y_0, z_0) dy dz + \\ + \iint_{\Omega_2} x^{2\alpha} \nu_2(x, z) G(x, 0, z; x_0, y_0, z_0) dx dz + \iint_S G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \varphi(\sigma) d\sigma,$$

where C is a constant. The particular values of Green's function are given by

$$G(0, y, z; x_0, y_0, z_0) = k_1 \left[\frac{F(\beta_1, \beta, 2\beta; \eta_{0x})}{X_1^{1+2\alpha+2\beta}} - \frac{F(\beta_1, \beta, 2\beta; \bar{\eta}_{0x})}{Y_1^{1+2\alpha+2\beta}} \right], \\ G(x, 0, z; x_0, y_0, z_0) = k_1 \left[\frac{F(\beta_1, \alpha, 2\alpha; \xi_{0y})}{X_2^{1+2\alpha+2\beta}} - \frac{F(\beta_1, \alpha, 2\alpha; \bar{\xi}_{0y})}{Y_2^{1+2\alpha+2\beta}} \right], \\ \beta_1 = \frac{1}{2} + \alpha + \beta, \quad k_1 = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(2+2\alpha+2\beta)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2\beta)\Gamma(1+\alpha+\beta)}.$$

The proof of the Theorem is carried out in a similar way.

Conclusion.

It became clear that if an equation has two singular coefficients, then its fundamental solutions can be written through the hypergeometric Appell function F_2 . On the other hand, thanks to the expansion formula (10) for the Appell function F_2 , solutions to boundary value problems can be obtained in explicit forms.

This circumstance must be taken into account when considering analogous boundary value problems for the multidimensional elliptic equation with two singular coefficients

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{2\alpha}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{2\beta}{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0,$$

the fundamental solutions of which are also expressed through the Appell function F_2 (for details, see [22, 23]).

REFERENCES

1. Bers L. Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. New York, London, 1953.

2. Ergashev T. G. On fundamental solutions for multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients. *Computers and Mathematics with Applications*. Elsevier, 2019, Vol.77, Issue.1, pp. 69-76.
3. Ergashev T. G. Fundamental Solutions for a Class of Multidimensional Elliptic Equations with Several Singular Coefficients. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2020, 13, pp. 48-57.
4. Ergashev T. G. Fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with several singular coefficients and confluent hypergeometric functions of many variables. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, Vol.41, No.1, pp. 15-26.
5. Ergashev T. G. The Dirichlet problem for elliptic equation with several singular coefficients. *Electronic Journal of Analysis and Applied Mathematics*, 2018 y, pp. 81-99.
6. Ergashev T. G., Hasanov A. Holmgren problem for elliptic equation with singular coefficients. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*, 2020, 32:3, pp. 159-175.
7. Ergashev T. G. Generalized Holmgren Problem for an Elliptic Equation with Several Singular Coefficients. *Differential Equations*, 2020, Vol.56, No.7, pp. 842-856.
8. Ergashev T. G., Tulakova Z. R. The Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Several Singular Coefficients in an Infinite Domain. *Russian Mathematics*, 2021, Vol.65, No.7, pp. 71-80.
9. Ergashev T. G., Tulakova Z. R. The Neumann problem for a multidimensional elliptic equation with several singular coefficients in an infinite domain. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022, Vol.43, No.1, pp. 199-206.
10. Ergashev T. G., Tulakova Z. R. A problem with mixed boundary conditions for a singular elliptic equation in an infinite domain . *Russian Mathematics*, 2022, Vol.66, No.7, pp. 51-63.
11. Smirnov M. M. A mixed problem for the equation $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$. *Siberian Mathematical Journal*, 1963, Vol.4, No.5, pp. 1150-1161.
12. Smirnov M. M. *Degenerate Elliptic and Hyperbolic Equations*. Moscow, Nauka, 1966, 292 pp. (In Russian).
13. Tulakova Z. R. A mixed problem for a three-dimensional elliptic equation. *Scientific Bulletin of NamSU*, 2023, No.7, pp. 44-51.
14. Karimov E. T., Nieto J. J. The Dirichlet problem for a 3D elliptic equation with two singular coefficients. *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, Vol.62, pp. 214-224.
15. Salakhitdinov M. S., Karimov E. T. Spatial boundary problem with the Dirichlet-Neumann condition for a singular elliptic equation. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, Vol.219, p. 3469-3476.

16. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions, vol 1, New York, Toronto and London, McGraw-Hill, 1953.
17. Burchnall J. L. and Chaundy T. W., *Expansions of Appell's double hypergeometric functions*. The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford, Ser., **11**(1940), pp. 249-270.
18. Copson E. T., *On Hadamard's Elementary Solution*, Proceedings of the Poyal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, **69**(1)(1970), pp. 19-27.
19. Hasanov A., Rassias J. M. and Turaev M., *Fundamental solutions for the generalized Elliptic Gellerstedt Equation*. Book: "Functional Equations, Difference Inequalities and ULAM Stalility Notions Nova Science Publishers Inc. New-York, USA, **6**(2010), pp. 73-83.
20. Tulakova Z. R. Mixed problem for the three-dimensional elliptic equation with the two singular coefficients. Scientific bulletin of Namangan State university, 2023, No.11, pp. 43-48.
21. Rassias J. M., Lecture Notes on Mixed Type Partial Differential Equations, World Scientific, 1990.
22. Ergashev T. G., Hasanov A. Fundamental solutions of the bi-axially symmetric Helmholtz equation. Uzbek Mathematical Journal, Tashkent, 2018. № 1, C. 55-64.
23. Srivastava H. M., Hasanov A., Choi J. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. Sohag J.Math., 2015, Vol.2, No.1, pp. 1-10.

**APPEL GIPERGEOMETRIK FUNKSIYASINING IKKITA
SIMMETRIK O'QLI SINGULYAR ELLIPTIK TENGLAMAGA
QO'YILGAN CHEGARAVIY MASALALARNI YECHISHGA
TATBIQLARI**

REZYUME

Ushbu maqolada uch o'lchovli ikkita singulyar koeffitsientli elliptik tenglama uchun aralash masalalar va Neyman masalasi o'rganilgan, "abc"usuli yordamida aralash masalalarni yechishning o'ziga xosligi isbotlangan. Neyman masalasining yechimi yagona emasligi va har bir yechim bir-biridan o'zgarmas bilan farq qilishi ko'rsatilgan. Grin funksiyalari usulini qo'llagan holda, biz masalaning yechimini aniq ko'rinishda topishimiz mumkin, bunda asosan Appel va Gauss gipergeometrik funksiyalarining xususiyatlaridan foydalaniladi.

Kalit so'zlar: Aralash masala, Neyman masalasi, uch o'lchovli ikkita singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama, Grin funksiyasi, Gauss va Appellning gipergeometrik funksiyalari.

**ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ АППЕЛЯ С
ПРИМЕНЕНИЯМИ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ
ТРЕХМЕРНОГО ДВУХОСНО-СИММЕТРИЧНОГО
СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе исследуются пространственная смешанная задача и задача Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами. Методом "abc" доказана единственность решения смешанных задач. Показано, что решение задачи Неймана неединственно и каждое решение отличается от другого константой. Применяя метод функций Грина, удается найти решение задачи в явном виде, при нахождении которого существенно используются свойства гипергеометрических функций Аппеля и Гаусса.

Ключевые слова: Пространственная смешанная задача, задача Неймана, трехмерное сингулярное эллиптическое уравнение, функция Грина, гипергеометрические функции Гаусса и Аппелла.

УДК 517.95

ПОЧТИ ВСЮДУ СХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ ИЗ $L_2^a(T^N)$

Буваев К. Т. *

РЕЗЮМЕ

В этой статье предлагается очень простой метод оценки максимального оператора в L_2 . Используя этот метод, можно значительно улучшить существующие теоремы о сходимости почти всюду разложений по собственным функциям произвольных эллиптических дифференциальных операторов с точечным спектром. В частности, получен новый результат о сходимости почти всюду эллиптических частичных сумм кратных рядов Фурье гладких функций.

Ключевые слова: ряд Фурье, пространство Соболева, эллиптический полином, максимальный оператор.

1. Введение. Пусть R^N N - мерное евклидово пространство, $T^N = \{x \in R^N : -\pi < x_k \leq \pi, k = \overline{1, N}\}$ – N - мерный куб, Z^N – решетка целых чисел из R^N , $n \in Z^N$, $nx = n_1x_1 + \dots + n_Nx_N$ – скалярное произведение.

Рассмотрим кратный тригонометрический ряд Фурье

$$\sum_{n \in Z^N} F_n e^{inx} \quad (1)$$

функции $F \in L_2(T^N)$. Здесь F_n – коэффициенты Фурье функции F , т.е. $F_n = (2\pi)^{-N} \int_{T^N} F(y) e^{-iny} dy$.

Для любого однородного эллиптического полинома $A(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$, $\xi \in R^N$ (т.е. $A(\xi) > 0$ для всех $\xi \neq 0$) с постоянными коэффициентами можно сопоставить частичную сумму ряда (1) по формуле

$$S_\lambda F(x) = \sum_{A(n) < \lambda} F_n e^{inx}. \quad (2)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$. В частности, если $A(\xi) = |\xi|^2$, то $S_\lambda F(x)$ совпадает с обычной шаровой частичной суммой. Далее будем предполагать, что множество $\Omega_A = \{\xi \in R^N : A(\xi) < 1\}$ является выпуклым.

Цел данной работе – изучить вопрос о сходимости почти всюду (п.в.) частичных сумм (2) для функций из пространств Соболева $L_2^a(T^N)$. Напомним, что функция $F(x) \in L_p(T^N)$ принадлежит при $a \geq 0$, $p \geq 1$ пространству Соболева $L_p^a(T^N)$, если конечна норма

$$\|F\|_{L_p^a(T^N)} = \left\| \sum_{n \in Z^N} (1 + |n|^2)^{\frac{a}{2}} F_n e^{inx} \right\|_{L_p(T^N)}. \quad (3)$$

* Буваев К. Т. – Национальный университет Узбекистана, buvayev@mail.ru

Когда a не целое, то это пространство также называется пространством Лиувилля. Отметим, что сходимость п.в. сферических частичных сум кратных рядов (1), ранее изучались основном для функций из классов L_p с некоторыми методами суммированиями (например метод средние Рисса, см. обзорные работы [1, 2]).

Через S_*F обозначим максимальный оператор, т.е. $S_*F = \sup_{\lambda>0} |S_\lambda F|$.

Теперь сформулируем основной результат.

Теорема. Пусть $A(\xi)$ – произвольный однородный эллиптический полином, множество Ω_A выпукло. Если $a > 0$, тогда для любой функции $F(x) \in L_2^a(T^N)$, п.в. на T^N имеет место равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda F(x) = F(x).$$

Кроме того, для максимального оператора справедлива оценка

$$\|S_*F(x)\|_{L_2(T^N)} \leq C_a \|F\|_{L_2^a(T^N)}. \quad (4)$$

Недавно этот результат был доказан для сферических частичных сум рядов (1) при $1 < p \leq 2$ в работе [3].

2. Вспомогательные утверждение.

Пусть $A(D)$ однородный эллиптический дифференциальный оператор с вещественными коэффициентами и областью определения $C_0^\infty(R^N)$, т.е.

$$A(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha, \quad D^\alpha = \frac{(-i\partial)^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}. \quad (5)$$

Замыкание эллиптического оператора (5) с постоянными вещественными коэффициентами будет самосопряженным и полуограниченным в $L_2(R^N)$. По известной теореме К.О. Фридрихса, каждый самосопряженный полуограниченный оператор имеет по крайней мере одно самосопряженное расширение. Используя преобразование Фурье, можно показать, что существует единственное самосопряженное расширение оператора A , причем спектральная функция этого оператора равна

$$e(x-y, \lambda) = (2\pi)^{-N} \int_{A(\xi) < \lambda} e^{i(x-y, \xi)} d\xi. \quad (6)$$

Обозначим через $E_\lambda f(x)$ спектральные разложения финитных функций f из $L_p(R^N)$, $p \geq 1$, т.е.

$$E_\lambda f(x) = (2\pi)^{-N} \int_{A(\xi) < \lambda} \hat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi, \quad (7)$$

где $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{R^N} f(x) e^{-ix\xi} dx$ – преобразование Фурье функции f . Ясно что, в этом случае спектральные разложение $E_\lambda f$ совпадает с кратным интегралом Фурье. Также, с учётом определения преобразования Фурье, спектральное разложение (7) представляется в виде интегрального оператора

$$E_\lambda f(x) = \int_{R^N} e(x-y, \lambda) f(x) dx. \quad (8)$$

Если рассмотреть оператор A на торе T^N , то спектральная функция расширения этого оператора имеет следующий вид

$$\theta(x, \lambda) = (2\pi)^{-N} \sum_{A(n) < \lambda} e^{inx}, \quad (9)$$

а спектральное разложение совпадает с равенством (2).

Аналогично с равенством (8), в силу определения коэффициентов Фурье для $S_\lambda F$ имеем

$$S_\lambda F(x) = \int_{T^N} \theta(x - y, \lambda) F(y) dy. \quad (10)$$

Теперь нам нужны будут переходить от пространств L_p^a к пространствам L_p . Для этого с помощью оператора A напишем

$$E_\lambda f = (1 + \hat{A})^{-\frac{a}{m}} E_\lambda (1 + \hat{A})^{\frac{a}{m}} f = (1 + \hat{A})^{-\frac{a}{m}} E_\lambda g$$

где \hat{A} – расширения оператора A в $L_2(R^N)$, $g(x) = (1 + \hat{A})^{\frac{a}{m}} f(x)$. Для любой функции $g \in L_p(R^N)$ введем оператор $E_{(\lambda, a)} g(x) = (1 + \hat{A})^{-\frac{a}{m}} E_\lambda g(x)$. По спектральной теореме Дж. Фон Неймана имеем

$$\begin{aligned} E_{(\lambda, a)} g(x) &= (2\pi)^{-N} \int_{A(\xi) < \lambda} (1 + A(\xi))^{-\frac{a}{m}} \hat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \\ &= \int_{R^N} e^\alpha(x - y, \lambda) g(y) dy. \end{aligned} \quad (11)$$

где $e^\alpha(x, \lambda) = (2\pi)^{-N} \int_{A(\xi) < \lambda} (1 + A(\xi))^{-\frac{a}{m}} e^{ix\xi} d\xi$.

Аналогично определим оператор $S_{(\lambda, a)} G(x) = S_\lambda F(x)$, $G \in L_2(T^N)$ на торе T^N :

$$S_{(\lambda, a)} G(x) = \sum_{A(n) < \lambda} (1 + A(n))^{-\frac{a}{m}} G_n e^{inx} = \int_{T^N} \theta_\lambda^\alpha(x - y) G(y) dy,$$

где $\theta_\lambda^\alpha(x) = \sum_{A(n) < \lambda} (1 + A(n))^{-\frac{a}{m}} e^{inx}$.

Пусть $E_{(a)}^*$ и $S_{(a)}^*$ – соответствующие максимальные операторы.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$. Если оператор $E_{(a)}^*$ ограничен (или слабо ограничен) в $L_p(R^N)$, то и оператор $S_{(a)}^*$ ограничен (или слабо ограничен) в $L_p(T^N)$.

Аналогичное утверждение для оператора Лапласа доказано в работе [3].

Из теоремы 1 при $p = 2$, вытекает что, чтобы доказать неравенство (4) достаточно доказать ограниченности оператора $E_{(a)}^*$ в $L_2(R^N)$.

Лемма 1. Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $L_2^a(R^N)$, $a \geq 0$, и является финитной, $A(\xi)$ – произвольный однородный полином, множество Ω_A выпукло. Тогда справедливо оценка

$$\|E_* f\|_{L_2(R^N)} \leq c \|f\|_{L_2^a(R^N)}. \quad (12)$$

Доказательство. Предположим, что носитель функций $f(x)$ принадлежит в некотором шаре $\{|x| \leq 3\} \subset R^N$. Тогда согласно принципу обобщенных локализаций, доказанная в работе [5], достаточно доказать неравенство (12) внутри этого шара $\{|x| < r\}$ для всех $r < 3$.

Ключевым моментом доказательства является замена ядра $e(x, \lambda)$ интегрального оператора $E_\lambda f(x)$ на функцию $e_\lambda(x) = e(x, \lambda)\chi(x)$ с некоторой радиальной функцией $\chi(x) \in C_0^\infty(R^N)$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq r + 3 \\ 0, & |x| > 2(r + 3). \end{cases}$$

Тогда для всех $\{|x| < r\}$ имеет место равенство

$$E_\lambda f(x) = \int_{R^N} e_\lambda(x - y)f(y)dy. \quad (13)$$

В силу (11) имеем

$$E_{(\lambda, a)}g(x) = \int_{R^N} e_\lambda^\alpha(x - y)g(y)dy = (e_\lambda^\alpha * g)(x), \quad g(x) \in L_2R^N \quad (14)$$

где $e_\lambda^\alpha(x) = \int_0^\lambda (1 + t)^{-\frac{a}{m}} de_t(x)$.

Для доказательства оценки (12) достаточно установить справедливость неравенства

$$\int_{R^N} \sup_{\lambda > 0} |e_\lambda^\alpha * g|^2 dx \leq C \int_{R^N} |g(x)|^2 dx. \quad (15)$$

При этом нам необходимо следующая оценка для преобразования Фурье $\hat{e}_\lambda(\xi)$ функции $e_\lambda(x)$, доказанная в работе [5].

Лемма 2. Пусть $A(\xi)$ - произвольный однородный полином, множество Ω_A выпукло, $a(\xi) = [A(\xi)]^{\frac{1}{m}}$. Тогда для любого $l \in N$ существует константа C_l , зависящая от l, r и R , такая, что для всех $\lambda \in R$ и $\xi \in R^N$ справедливо оценка

$$\left| \frac{d^j}{d\lambda^j} \hat{e}_\lambda(\xi) \right| \leq \frac{C_l}{(1 + |a(\xi) - \lambda|)^l}, \quad j = 0, 1. \quad (16)$$

Теперь продолжаем доказательство леммы 1. Пусть $\hat{e}_\lambda^\alpha(\xi)$ преобразования Фурье функции $e_\lambda^\alpha(x)$. Нетрудно показать следующее равенство

$$\hat{e}_\lambda^\alpha(\xi) = \int_0^\lambda (1 + t)^{-\frac{a}{m}} d\hat{e}_t(\xi).$$

Интегрируя по частям последнее равенство, получим

$$\hat{e}_\lambda^\alpha(\xi) = (1 + \lambda)^{-\frac{a}{m}} \hat{e}_\lambda(\xi) + \frac{a}{m} \int_0^\lambda (1 + t)^{-\frac{a}{m}-1} \hat{e}_t(\xi) dt,$$

учитывая $a \geq 0$ и из неравенства (16) при $j = 0$ получаем

$$|\hat{e}_\lambda^a(\xi)| \leq |\hat{e}_\lambda(\xi)| + \frac{a}{m} \int_0^\infty |\hat{e}_t(\xi)| dt \leq \frac{C_l}{(1 + |a(\xi) - \lambda|)^l}. \quad (17)$$

Аналогично доказывается следующая оценка

$$\left| \frac{d}{d\lambda} \hat{e}_\lambda^a(\xi) \right| \leq \frac{C_l}{(1 + |a(\xi) - \lambda|)^l}. \quad (18)$$

Интегрируя (17) и (18) по λ получим равномерно по $\xi \in R^N$ оценку

$$\int_0^\infty \left| \frac{d^j}{d\lambda^j} \hat{e}_\lambda^a(\xi) \right|^2 d\lambda < C, \quad j = 0, 1. \quad (19)$$

Доказательство оценки (15) завершается следующим образом. Так как

$$[e_\lambda^a * g]^2 = 2 \int_0^\lambda (e_t^a * g) \frac{d}{dt} (e_t^a * g) dt$$

и $2ab \leq a^2 + b^2$, то

$$\sup_{\lambda > 0} |e_\lambda^a * g|^2 \leq \int_0^\infty |e_t^a * g|^2 dt + \int_0^\infty \left| \frac{d}{dt} (e_t^a * g) \right|^2 dt.$$

Из свойства свертки, имеем

$$\int_{R^N} \sup_{\lambda > 0} |(e_\lambda^a * g)(x)|^2 dx \leq \int_{R^N} |\hat{g}(x)|^2 \int_0^\infty |\hat{e}_t^a(x)|^2 dt dx + \int_{R^N} |\hat{g}(x)|^2 \int_0^\infty \left| \frac{d}{dt} \hat{e}_t^a(x) \right|^2 dt dx.$$

Требуемая оценка (15) теперь вытекает из неравенства (19) и равенство Парсеваля. Лемма 1 доказано.

3. Доказательства теоремы

Пусть $F \in C_0^\infty(T^N)$. Тогда при любом $a > 0$ равномерно по $x \in T^N$ справедливо равенство $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda F(x) = F(x)$. Пусть теперь $F \in L_2^a(T^N)$. Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как C_0^∞ плотно в L_2^a , то $\exists h \in C_0^\infty(T^N)$ такая, что $\|F - h\|_{L_2^a} < \varepsilon$. В силу равномерной сходимости S_λ к $h(x)$ в T^N существует число $L = L(\varepsilon)$ такое, что при $\lambda > L$

$$|S_\lambda h(x) - h(x)| < \varepsilon, \quad x \in T^N.$$

Тогда при $\lambda > L$ получаем неравенство

$$|S_\lambda F(x) - F(x)| \leq |S_\lambda(F - h)(x)| + |S_\lambda h(x) - h(x)| + |F(x) - h(x)| \leq$$

$$\leq S_*(F - h)(x) + \varepsilon + |F(x) - h(x)|.$$

Используя оценку (4) и неравенство $\|\varphi\|_{L_2} \leq \|\varphi\|_{L_2^q}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \|\sup_{\lambda > L} |S_\lambda F(x) - F(x)|\|_{L_2(T^N)} &\leq c\|F(x) - h(x)\|_{L_2^q(T^N)} + c\varepsilon + \\ &+ c\|F(x) - h(x)\|_{L_2(T^N)} \leq c\|F(x) - h(x)\|_{L_2^q(T^N)} + c\varepsilon < c_1\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\sup_{\lambda > L} |E_\lambda^s f(x) - f(x)|\|_{L_2(R^N)} = 0.$$

Последнее соотношение означает, что $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda F(x) = F(x)$ почти всюду в T^N .

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений// УМН, 1976, т.31, № 6, с.29-83; 1977, т.32, № 1, с.107-130.
2. Алимов Ш. А., Ашуров Р. Р., Пулатов А. К. Кратные ряды и интегралы Фурье// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНТИ. 1989, Т.42, с.5-105.
3. Ашуров Р.Р. Сходимость почти всюду кратных тригонометрических рядов Фурье функций из классов Соболева// Математические заметки, 2021, т. 109, выпуск 2, с.163-169.
4. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Мир, Москва, 1974, 333 с.
5. Ashurov, R.R., Ahmedov, A., Ahmad Rodzi b. Mahmud. The generalized localization for multiple Fourier integrals, J. Math. Anal. Appl., 371, 832-841 (2010).

REZYUME

Mazkur maqolada maksimal operatorining L_2 da baholashni sodda usuli taklif qilinadi. Ushbu usuldan foydalanib, ixtiyoriy elliptik differensial operatorlarining nuqtaviy spektorlarini xos funksiyalari bo'yicha yoyilmasining deyarli yaqinlashishi haqidagi teoremani yaxshilash mumkin ekanligi ko'rsatiladi. Jumladan, silliq funksiyalar uchun karrali Furiye qatorlarining elliptik qismaniy yig'indilarini deyarli yaqinlashish haqida yangi natija olingan.

Kalit so'zlar: Furiye qatori, Sobolev fazosi, elliptik ko'phad, maksimal operator.

RESUME

In this paper it is proposed a very simple method for estimating the maximal operator in L_2 . Using this method one can considerably improve the existing theorems on convergence almost-everywhere of eigenfunction expansions of an arbitrary elliptic differential operators with a point spectrum. In particular, it is obtained a new result on convergence almost-everywhere of elliptical partial sums of the multiple Fourier series of smooth functions.

Key words: Fourier series, Sobolev space, elliptic polynomial, maximal operator.

УДК 517.12

О некоторых подпространствах суперрасширения топологического пространства являющихся Q -многообразий**Жураев Т.Ф.¹, Мухамадиев Ф.Г.²****РЕЗЮМЕ**

В данной статье рассматривая суперрасширения λX для метрического связного неодноточечного компакта X , выделено ряд подпространств пространства максимальных сцепленных систем λX являющихся Q -многообразиями.

Ключевые слова: Суперрасширения, максимальная сцепленная система, Q -многообразия.

Покрытие пространства X , состоящее из двух элементов называется бинарным.

Пространство X называется суперкомпактным, если существует такая предбаза \mathfrak{B} открытых множеств X , что из любого покрытия X элементами этой предбазы можно выбрать бинарное покрытие.

Напомним, что семейство \mathfrak{G} замкнутых подмножеств называется замкнутой базой X , если всякое замкнутое подмножество X является пересечением элементов семейства \mathfrak{G} .

Из леммы Александра вытекает, что суперкомпактное пространство компактно. Семейство \mathfrak{G} замкнутых подмножеств пространства X называется его замкнутой предбазой, если конечное объединение элементов семейства \mathfrak{G} образует замкнутого базу пространства X .

Предложение 1 [1]. Семейство \mathfrak{G} является замкнутой базой (предбазой) пространства X тогда и только тогда, когда семейство $\mathfrak{B} \in \{X \setminus A : A \in \mathfrak{G}\}$ его открытая база (предбаза).

Определение 1 [1]. Система ξ замкнутых подмножеств пространства X называется сцепленной, если любые два элемента из ξ пересекаются.

В связи с предложением 1 можно переформулировать определения суперкомпактов.

Предложение 2 [1]. Пространство суперкомпактно тогда, и только тогда, когда в нем существует замкнутая предбаза всякая сцепленная подсистема которой имеет непустое пересечение.

Сцепленная система ξ называется максимальной, если ξ не является подсистемой другой сцепленной системы.

По лемме Цорна всякая сцепленная система может быть дополнена до максимальной сцепленной системе (коротко, м.с.с.), но такое дополнение, как правильно, не однозначно

Предложение 3 [1]. Сцепленная система ξ пространства X является м.с.с. тогда и только тогда, когда оно обладает следующим свойством полноты: если замкнутое множество $A \subset X$ пересекается с каждым элементом из ξ , то $A \in \xi$.

¹Жураев Т.Ф. – Ташкентский государственный педагогический университет, tursunzhuraev@mail.ru

²Мухамадиев Ф.Г. – Национальный университет Узбекистана, farhodgm@nuu.uz

Обозначим через λX множество всех м.с.с. пространства X .

Для замкнутого множества $A \subset X$ положим $A^+ = \{\xi \in \lambda X : A \in \xi\}$. Для открытого множества $U \subset X$ положим $O(U) = \{\xi \in \lambda X : \text{существует такое } F \in \xi, \text{ что } F \subset U\}$.

Имеет место равенство: $\lambda X \setminus A^+ = O(X \setminus A)$.

Согласно этому равенству и предложения 1 замкнутую предбазу пространства λX образуют множества вида A^+ т.е. $\mathfrak{B} = \{A^+ : A \text{ замкнуто в } X\}$ - есть предбаза топологии пространства λX .

Заметим, что семейство множеств вида $O(U)$ покрывает множество λX ($O(X) = \lambda X$), по этому эти множества $O(U)$ открытую предбазу топологии на λX .

Значит, суперрасширение λX любого пространства X суперкомпактно.

Для произвольной точке $x \in X$ через $\eta(x)$ обозначим семейство всех замкнутых подмножеств пространстве X , содержащих точку x . Система $\eta(x)$ - замкнутый ультра-фильтр и тем более м.с.с. т.е. определено отображение $\eta : X \rightarrow \lambda X$, которое непрерывно в силу равенства $U = \eta^{-1}(O(U))$ для любого открытого множества $U \subset X$. т.е. $\eta : X \rightarrow \lambda X$ есть вложение. Если X компакт, то согласно 4.21 [1] суперрасширение λX также является компактом. Для $\varepsilon > 0$ через $D(E, \varepsilon)$ обозначим замкнутый ε -шар $\{x : \rho(x, F) \leq \varepsilon\}$ вокруг множества F , где F замкнуто в X . Определяем, метрику $\bar{\rho}$ на λX полагая $\bar{\rho}(\xi_1, \xi_2) = \inf\{\varepsilon \geq 0 : F \in \xi_1 \Rightarrow D(F, \varepsilon) \in \xi_2\}$.

Расшировка определений метрики показывает, что $\bar{\rho}$ совпадает с метрикой, порожденной на λX метрикой - Хаусдорфа ρ_{H^2} , на двойной экспоненте $\text{expre}X$.

Таким, образом пространство $(\lambda X, \bar{\rho})$ изометрически вложено в $(\text{expre}X, \rho_{H^2})$. Значит, пространство $(\lambda X, \bar{\rho})$ является метрическим компактом [1].

Отображение $f : X \rightarrow Y$ метрических пространств называется изометрией, если $\rho(x, x') = \rho(f(x), f(x'))$ для всех пар $x, x' \in X$. Если существует изометрия из X на Y , то пространства X и Y называется изометричными.

Через $\lambda_n(X)$ обозначим подпространство суперрасширения $\lambda(X)$, состоящее из всех максимальных сцепленных систем, носители которых имеют мощность $\leq n$.

Для сохраняющего пересечения функтора F определен носитель $\text{supp}_F(a)$ всякой точки $a \in F(X) : \text{supp}_F(a) = \bigcap \{A \subset X : A \text{ замкнуто и } a \in F_X(A)\}$ [1].

Подсистему $\xi' \subset \xi$ назовем базой ξ , если для любого элемента $F \in \xi$ существует такой элемент $\Phi \in \xi'$, что $\Phi \subset F$. Нетрудно показать, что система ξ_H наименьших (по включению) элементов м.с.с. ξ является наименьшей базой ξ . Носителем м.с.с. ξ будем называть множество $\text{supp}(\xi) = \bigcup \xi_H$. Если X - бесконечный компакт, положим

$$\lambda_n(X) = \{\zeta : \zeta \in \lambda(X), |\text{supp}(\zeta)| \leq n\}.$$

Заметим, прежде всего, что $\lambda_1(X)$ (отождествляется м.с.с. с ее одноточечным носителем) и $\lambda_2(X) \setminus \lambda_1(X) = \emptyset$, поскольку не существует м.с.с., носитель которой состоял бы ровно из двух точек. Однако, при $n \geq 3$ все множества $\lambda_n(X)$ различны. В самом деле, для любого $n \geq 3$ можно построить м.с.с. $\xi \in \lambda(X)$, носитель которой состоит из точек x_1, x_2, \dots, x_n .

Например, ξ можно задать с помощью такой базы: $\xi' = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{\{x_1, x_2\} : k = \overline{2, n}\}$.

Очевидно, что $\lambda_n(X)$ замкнуто в $\lambda(X)$ для любого $n \in N$, $n \neq 2$. Следовательно, множество $\lambda_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(X)$ есть σ -компактное подпространство пространства $\lambda(X)$ и всюду плотно в $\lambda(X)$.

Для бесконечного компакта $X \in \text{Comp}$ и нормального или полунормального функтора $F : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ имеющего бесконечной степени, примем следующие обозначения:

- 1) $F_{\nabla}(X) = F(X) \setminus \eta_F(X)$. При $n = 1$ отождествим $F_{\nabla}(X) \simeq F_{\nabla_1}(X)$;
- 2) $F_n(X) = \{a \in F(X) : |\text{supp}_F(a)| \leq n\}$;
- 3) $S_F(A) = \{a \in F(X) : \text{supp}(a) \cap A \neq \emptyset\}$, где $A \neq \emptyset$ и $A \subset X$;
- 4) $F_{nk}(X) = F_n(X) \setminus F_k(X)$, $n > k$, $n \geq 2$;
- 5) $F_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$;
- 6) $F_{\nabla\omega}(X) = F(X) \setminus F_\omega(X)$;
- 7) $F_{\omega n}(X) = F_\omega(X) \setminus F_n(X)$.

Напомним, что топологическое пространство Y называется абсолютным (окрестностным) ретрактом в классе K (записывается $Y \in A(N)R(K)$ [2] если $Y \in K$ и для всякого гомеоморфизма h , отображающего Y на замкнутое подмножество $h(Y)$ пространства X из класса K , множество $h(Y)$ является ретрактом (окрестностным) пространства X .

Напомним что, топологическое пространство X называется многообразием, моделированным на пространстве Y , или Y -многообразием [2], если всякая точка пространства X имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y .

Q -многообразием называют сепарабельное метрическое пространство, локально гомеоморфное гильбертовому кубу Q , где

$$Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1; 1]_i$$

-гильбертов куб [3], $W_{i=1}^{\pm} = \{(g_j) \in Q | g_j = \pm 1\}$ - j -ая грань гильбертова куба Q , $BdQ = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i^{\pm}$ - называется псевдограницей куба Q , а $S = Q \setminus BdQ$ - псевдовнутренностью куба Q .

В теории бесконечномерных многообразий важную роль играют три объекта: гильбертов куб Q , сепарабельное гильбертово пространство l_2 и \sum линейная оболочка стандартного кирпича

$$Q' = \prod_{i=1}^{\infty} [-1; \frac{1}{2^i}]$$

в гильбертовом пространстве l_2 .

По теореме Андерсона-Кадеца, l_2 гомеоморфно S . Из результатов Бессаги-Пелчинского следует, что \sum гомеоморфно $\text{rint}Q$. Здесь через $\text{rint}Q$ обозначается множество $\{x = x(n) \in Q | |x_n| < t < 1 \text{ для всех } n \in N\}$.

Далее, $\text{rint}Q \approx BdQ$, значит $BdQ \approx \sum$. Через l_2^f обозначается линейное подпространство гильбертова пространства l_2 , состоящее из всех точек, лишь конечное число координат которых отлично от нуля, а Q^f -подпространство гильбертова куба Q , состоящее из всех точек лишь конечное число координат которых отлично от нуля.

Известно, что пространство Q , Σ и l_2 сильно бесконечномерны, а пространство l_2^f слабо бесконечномерны и эти пространства однородны.

Замкнутое множество A пространства X называется Z -множеством в X , если тождественное отображение id_X пространства может быть сколь угодно близко аппроксимировано отображениями $f : X \rightarrow X \setminus A$.

Счетное объединение Z -множеств в X называется σ - Z -множеством в X .

Следуя по [3], σ - Z -множество гильбертова куба Q называют граничным множеством в Q (обозначается через $B(Q)$), если $Q \setminus B \approx l_2$. Более общим образом, граничным множеством в Q -многообразии называют σ - Z -множество, дополнение до которого является l_2 -многообразием.

Конструкцию суперрасштрения $\lambda(X)$ придумал Де Гроот [2]. Van Mill доказал, что пространство $\lambda(X)$ гомеоморфно гильбертовому кубу, если X неодноточечный метрический континуум [3].

Определение 2 [4]. Пусть X топологическое пространство. Непустое замкнутое подмножество Y пространства $\lambda(X)$ называется выпуклым, если его непустое (цепленное) семейство G состоящих из замкнутых множеств из X имеет место равенство: $Y = \bigcap \{C^+ : C \in G\}$

Пример. Для каждого $P \in \lambda(X)$ система $\{P\} = \bigcap \{P^+ : P \in P\}$ выпукло и $\lambda(X)$ выпукло. Очевидно, что $\lambda(X) = X^+$.

Для элементов M и $N \in \lambda(X)$ то положим $I(M, N) = \{P \in \lambda(X) : M \cap N \subset P\}$.

Подмножество $I(M, N)$ пространства $\lambda(X)$ называется интервалом между точками M и N и $I(M, N) \subset \lambda(X)$ [5].

Для каждой тройки элементов $M, N, P \in \lambda(X)$ существует м.с.с. определенная следующим образом $g(M, N, P) = (M \cap N) \cup (N \cap P) \cup (M \cap P)$. Заметим, что $g(M, N, P) \in I(M, N)$. Для отображения $g(M, N, P)$ верно следующая:

- i) отображение $g(M, N, P) : \lambda^3(X) \rightarrow \lambda(X)$ непрерывно;
- ii) для каждой паре $M, N \in \lambda(X)$ ограничение отображения на $I(M, N)g(M, N) : \lambda(X) \rightarrow \lambda(X)$ есть ретракция $\lambda(X)$;
- iii) интервальное отображение $I(M, N) : \lambda(X)^2 \rightarrow \text{exp}(\lambda(X))$ непрерывно.

Пусть $M \in \lambda(X)$. На множестве $\lambda(X)$ определяем бинарное отношение по элементу M (коротко обозначим: \leq , или \leq_M) следующим образом: $P \leq D$, если $I(M, P) \subset I(M, D)$, где $P, D \in \lambda(X)$.

Очевидно, что для каждого $M \in \lambda(X)$ определенное отношение определяет квази порядок и частичный порядок на множестве $\lambda(X)$ [8].

Лемма 1 [8]. Пусть M и $N \in \lambda(X)$. Тогда $M \cap D \subset N$, если $N \subset M \cup D$.

Следствие 1 [8]. Пусть $M, N \in \lambda(X)$. Тогда имеет место равенство: $\{D : N \leq_M D\} = \bigcap \{N^+ \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}\}$.

Лемма 2 [8]. X нормальное T_1 -пространство и $Y \subset \lambda(X)$ непустое замкнутое подмножество. Тогда следующее условия эквивалентны:

- i) Y выпукло;
- ii) для каждой пар м.с.с. $P_1, P_2 \in Y$ имеем $I(P_1, P_2) \subset Y$;
- iii) Для каждого $M \in \lambda(X)$ ассоциированное порядком \leq_M в $\lambda(X)$ множество Y имеет

наименьший элемент по отношению \leq_M .

Для каждого $M \in \lambda(X)$ через $\langle M, Y \rangle$ обозначается минимальный элемент порядку \leq_M в множестве Y , где Y какое нибудь выпуклое подмножество $\lambda(X)$.

Теорема 1. Для любого метрического компакта X и любого $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ подпространство $\lambda_n(X)$ есть Z -множество в $\lambda(X)$.

Доказательство. Пусть X произвольный метрический компакт с метрикой ρ . В этом случае по вышесказанному на компакте $\lambda(X)$ рассматривается метрика $\bar{\rho}$. Известно, что при $n > 2$ компакт $\lambda_n(X)$ есть подпространство $\lambda(X)$ т.е. $\lambda_n(X) \subset \lambda(X)$. Естественно мы полагаем, что X бесконечный компакт. Следовательно, подпространство $\lambda(X) \setminus \lambda_n(X)$ открыто в $\lambda(X)$ и $\lambda(X) \setminus \lambda_n(X) \neq \emptyset$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выбираем точку $\xi_0 \in \lambda(X) \setminus \lambda_n(X)$ так, чтобы $|\text{supp } \xi_0| \geq n + 1$ и $\bar{\rho}(\xi_0, \lambda_n(X)) < \frac{\varepsilon}{n}$. Для точки ξ_0 (так как ξ_0 есть) положим $Y(\xi_0) = \bigcap \{P^+ : P \in \xi_0\}$. Теорема 1 доказана.

По результатам работы [8] множество $Y(\xi_0)$ выпукло и замкнуто в $\lambda(X)$. Построим отображение $f_{\xi_0}(\xi) : \lambda(X) \rightarrow \lambda(X)$ полагая

$f_{\xi}(\xi) = \langle \xi, Y(\xi_0) \rangle = p(\xi, Y(\xi_0))$ где $p(\xi, Y(\xi_0))$ непрерывное отображение из теоремы 2.3.[8]. Заметим, что $f_{\xi}(\xi) \in \lambda_n(X)$ и $|\text{supp } f_{\xi}(\xi)| \geq n + 1$. Отсюда, $f_{\xi_0}(\xi) \in \lambda(X) \setminus \lambda_n(X)$.

С другой стороны, не трудно проверить $\bar{\rho}(\xi, f_{\xi_0}(\xi)) < \varepsilon$. Отображение $f_{\xi_0}(\xi)$ непрерывно. Значит, для $n > 2$ подпространство $\lambda_n(X)$ есть Z -множество в $\lambda(X)$.

Следствие 2. Для любого бесконечного компакта X подпространство $\lambda_{\omega}(X)$ есть σ - Z -множество в $\lambda(X)$.

Следствие 3. Для любого бесконечного подпространство $\lambda_{\omega}(X)$ всюду плотно в $\lambda(X)$ т.е. $\overline{\lambda_{\omega}(X)} = \lambda(X)$.

Теорема 2. Для любого связного неединичного компакта X и любого $n \in \mathbb{N}$, ($n \neq 2$) пространство $\lambda_{\nabla n}(X)$ есть Q многообразия и $\lambda_{\nabla n}(X) \in ANR$.

Доказательство. Пусть X неединичный связный компакт. Тогда $\lambda(X)$ есть AR компакт. Если в этом случае X локально связно, то $\lambda(X) \in ANR$. Подпространство $\lambda(X) \setminus \lambda_n(X)$ есть открытое множество пространства $\lambda(X)$, тогда открытое множество ANR компакта есть ANR пространство. Если, же X метрический континуум, то $\lambda(X) \simeq Q$. т.е. $\lambda(X)$ есть Q -многообразия. Открытое множество гильбертова куба Q , есть Q -многообразия. т.е. $\lambda_{\nabla n}(X)$ есть Q -многообразия. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Для любого бесконечного континуума подпространство $\lambda_{\nabla \omega}(X)$ есть бесконечномерное топологически полное сепарабельное AR -пространство.

Доказательство. Пусть X бесконечный неединичный континуум. В этом случае $\lambda(X) \simeq Q$ [7]. По следствие 3 подпространство $\lambda_{\omega}(X)$ есть σ - Z -множество в $\lambda(X)$. Тогда $\lambda_{\nabla \omega}(X) = \lambda(X) \setminus \lambda_{\omega}(X)$ есть дополнение σ - Z -множества. В этом случае по лемме 2.3.[3] подпространство $\lambda_{\nabla \omega}(X)$ есть бесконечномерное топологически полное сепарабельное AR -пространство. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Для любого связного неединичного метрического компакта X подпространство $\lambda_{\omega}(X)$ является граничным множеством компакта $\lambda(X)$.

Из теоремы 4 используя факты относящихся к граничным множества гильбертова куба Q работы [3] доказывається.

Теорема 5. Для любого непустого замкнутого подмножества $A \subset X$ отличного от самого связного неединичного метрического компакта X подпространство $S_{\lambda}(A)$

гомеоморфно гильбертовому пространству ℓ_2 .

Значить, для любого неодноточечного связного метрического компакта X имеем:

- 1) $\lambda_{\nabla}(X)$ есть Q -многообразия;
- 2) $\lambda_n(X)$ есть метрический связный компакт ($n \neq 2$);
- 3) $S_{\lambda}(A)$ гомеоморфно гильбертовому пространству ℓ_2 , где $A \neq \emptyset$, $A \neq X$, $A = \bar{A}$;
- 4) $\lambda_{n,k}(X)$ открыто в $\lambda_n(X)$, где $n > k$, $n \geq 2$;
- 5) $\lambda_{\omega}(X)$ бесконечномерно и является граничным множеством компакта $\lambda(X)$;
- 6) Подпространство $\lambda_{\nabla\omega}(X)$ гомеоморфно гильбертовому пространству ℓ_2 ;
- 7) Подпространство $\lambda_{\omega n}(X)$ есть ANR пространство.

Литература

1. В.В.Федорчук, В.В.Филиппов. Общая топология. Основные конструкции. Москва: Изд.-во МГУ, 1988, 252 стр.
2. С.А.Богатый, В.В.Федорчук. Теория ретрактов и бесконечномерные многообразия. Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия М. 24 (1986) 195-270
3. D.W.Curtis, Boundary sets of the Hilbert cube, Topology and its Applications 23 (1985) 163-172
4. Czeslaw Bessaga and Aleksander Pelczynski, Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology (Monografie Matematyczne, No. 58) (1975) 353 pages.
5. R.D.Anderson, On topological infinity deficiency, Mich. Math. Journal 14 (1967) 365-383
6. J.De Groot, Supercompactness and superextensions. Contribution extension theory of topological structures. Sump. Berlin: 1967. Deutseler Verlag Wiss. (1969) 89-90
7. J.Van Mill, Superextensions of metrizable continua are Hilbert cubes, Fund.Math. 107 (1980) 201-224
8. van de Vel, Superextensions and Lefschetz fixed point structures. Fund. Math. 104 (1979) 27-42
9. F.E. Brouwer, A. Schrijver A characterization of supercompactness with an application to tree-like spaces. Report Math. Centre, ZW 34/74, Amsterdam, 1974.

REZYUME

Maqolada bir nuqtadan iborat bo'lmagan X bog'lamli metrik kompakt fazoning superkengaytmasi λX qaraldi va uning maksimal zanjirlangan sistemalar fazosi λX ning Q -ko'pxillik tashkil qiluvchi bir qator qism fazolar ajratib berildi.

Kalit so'zlar: Superkengaytma, maksimal zanjirlangan sistema, Q -ko'pxillik.

RESUME

This article considers the λX superextension for a metric connected non-single-point compact set X ; a number of subspaces of the space of maximally linked systems λX that are Q -manifolds are distinguished.

Key words: Superextensions, maximal linked systems, Q -manifolds.

УДК 517.55

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ AW^* -АЛГЕБРЫ ИМЕЮЩИЕ НЕ W^* -АБЕЛЕВЫ AW^* -ПОДАЛГЕБРЫ

Ким Д. И. *

РЕЗЮМЕ

В работе строится вещественный аналог AW^* факторов, построенных Райтом и Такенучи, с не W^* абелевой AW^* -подалгеброй и дается определение аппроксимативно внутренних $*$ -автоморфизмов AW^* фактора типа II_1 .

Ключевые слова: AW^* -алгебры, абелевы AW^* -подалгебры, W^* -алгебры, $*$ -автоморфизмы, состояние, $B(H)$, собственно бесконечные AW^* -алгебры.

Пусть Банахова $*$ -алгебра A над полем \mathbb{C} называется C^* -алгеброй, если $\|aa^*\| = \|a\|^2$, для любого $a \in A$. C^* -алгебра M называется W^* -алгеброй, если существует банахово пространство M_* такое, что $(M_*)^* = M$.

Пусть $B(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H . Локально-выпуклая топология определяемая с помощью сходимости:

$$x_\alpha \rightarrow \theta \quad :\Leftrightarrow \quad (x_\alpha \xi, \eta) \rightarrow 0, \quad \forall \xi, \eta \in H$$

называется **слабой** (операторной) **топологией**. Известно, что если $M \subset B(H)$ – $*$ -подалгебра, то M является W^* -алгеброй тогда и только тогда, когда M – слабо замкнута и $e \in M$.

Пусть M – W^* -алгебра. Множество M' всех элементов из $B(H)$, коммутирующих с каждым элементом из M , называется *коммутантом* алгебры M . Центром $Z(M)$ алгебры M называется множество элементов M , коммутирующих с каждым элементом из M . Легко видеть, что $Z(M) = M \cap M'$. Элементы $Z(M)$ называются центральными элементами. W^* -алгебра M называется фактором, если $Z(M)$ состоит из комплексных кратных $\mathbf{1}$, т.е. $Z(M) = \{\lambda \mathbf{1} : \lambda \in \mathbb{C}\}$

Пусть e, f, h – проекторы (самосопряженные идемпотенты $p = p^2 = p^*$) из M . Мы говорим, что e эквивалентно f , и пишем $e \sim f$, если $e = w^*w$ $f = ww^*$ для некоторой частичной изометрии w из M

Проектор e называется:

- конечным, если из $e \sim f \leq e$ следует $f = e$;
- бесконечным – иначе;
- чисто бесконечным, если e не имеет ненулевой конечный подпроектор;
- абелевым, если алгебра eMe является абелевой W^* алгеброй.

W^* Алгебра M называется:

*Ким Д. И. – Национальный университет Узбекистана, Ташкентский филиал РЭУ им. Г.В. Плеханова, dmitriy.kim.1995.04.23@gmail.com

- конечной, бесконечной, чисто бесконечной, если $\mathbf{1}$ является конечной, бесконечной, чисто бесконечной соответственно;
- полуконечной, если каждый проектор в M содержит ненулевой конечный подпроектор;
- собственно бесконечной, если каждый ненулевой проектор из $Z(M)$ бесконечен;
- дискретной или типа I , если она содержит точный абелев проектор (т.е. абелев проектор с центральным носителем $\mathbf{1}$);
- непрерывной, если в M нет абелевго проектора, кроме нулевого;
- M имеет тип II , если M полуконечна и непрерывна;
- тип I_{fin} (соответственно I_∞), если M имеет тип I и конечна (соответственно собственно бесконечна);
- тип II_1 (соответственно тип II_∞), если M имеет тип II и конечна (соответственно собственно бесконечна);
- тип III , если M чисто бесконечна.

Определение 1. Пусть A — вещественная или комплексная $*$ -алгебра и пусть S — непустое подмножество A . Положим $R(S) = \{x \in A : sx = 0, \forall s \in S\}$ и назовем $R(S)$ правым аннулятором S . Аналогично $L(S) = \{x \in A : xs = 0, \forall s \in S\}$ левый аннулятор S .

Определение 2. $*$ -алгебра A называется **бэровской $*$ -алгеброй**, если для любого непустого $S \subset A$ имеем $R(S) = gA$, для некоторого проектора g . Поскольку $L(S) = R(S^*)^* = (hA)^* = Ah$, определение симметрично и может быть дано через левый аннулятор. Здесь $S^* = \{s^* | s \in S\}$.

Определение 2. Вещественная (или комплексная) C^* -алгебра A , являющаяся $*$ -алгеброй Бэра, называется вещественной (соотв. комплексной) **AW*-алгеброй**. Известно, что всякая W^* -алгебра является AW*-алгеброй, однако обратное неверно.

Линейный функционал ϕ на A называется *положительным*, если $\phi(x^*x) \geq 0$ для всех $x \in A$. Положительный линейный функционал с $\|\phi\| = 1$ называется *состоянием*. Состояние называется *точным*, если $x \in A_+$, $\phi(x) = 0$ влечет $x = 0$; *нормальным*, если для любой сети $\{x_\alpha\} \subset A$ с $x_\alpha \nearrow x$ имеем $\phi(x) = \sup_\alpha \phi(x_\alpha)$.

Пусть A — C^* -алгебра. Для элементов $a, b \in A_+$, мы пишем $a \lesssim b$, если существует последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ такая, что $x_n b x_n^* \rightarrow a$.

Функция $D : A \rightarrow [0, 1]$ называется *размерностной функцией*, если

1. $D(a + b) = D(a) + D(b)$ всякий раз, когда $a \perp b$;
2. $D(a) = D(a^*a) = D(aa^*) = D(a^*)$ для всех $a \in A$;

3. из $0 \leq a \leq b$ следует $D(a) \leq D(b)$;

4. $a \lesssim b$ влечет $D(a) \leq D(b)$.

Более того, мы говорим, что отображение D субаддитивно, если $D(a + b) \leq D(a) + D(b)$ ($\forall a, b \in A$), и снизу полунепрерывно, если $D^{-1}((\lambda, 1])$ - открыто в A , для $\lambda \in [0, 1)$.

Нам понадобится следующая теорема.

Теорема 1.[1] Если X — локально компактное хаусдорфово пространство, то существует каноническое соответствие между субаддитивными полунепрерывными снизу размерностными функциями на $C_0(X)$ и счетно-аддитивными мерами на X с σ -компактным носителем, определенным на σ -алгебре, порожденной σ -компактными открытыми множествами.

Утверждение 1. Пусть R — вещественная AW^* -алгебра типа I, такая что $R + iR$ — AW^* -алгебра. Пусть $Q \subset R$ — вещественная абелева AW^* -подалгебра. Если Q является вещественной W^* -алгеброй, то R также является вещественной W^* -алгеброй.

Доказательство. Аналогичный результат имеется в комплексном случае. Поэтому, так как $Q + iQ$ является W^* -алгеброй то $R + iR$ является W^* -алгеброй. Тогда R является вещественной W^* -алгеброй. \square

Замечание. Напомним, что в следствие 4.5.3 ([2]) этот утверждение доказано в случае когда $Q = Z(R)$ — центр алгебры R .

Теорема 2.[3] Если A — собственно бесконечная AW^* -алгебра, то A монотонно σ -полна, то есть каждая ограниченная монотонно возрастающая последовательность самосопряженных элементов имеет точную верхнюю границу в A . Если алгебра A дополнительно еще обладает точным состоянием, то она монотонно полна.

Отсюда получим следующее следствие

Следствие. Пусть R — собственно бесконечная вещественная AW^* -алгебра, такая что $A = R + iR$ — AW^* -алгебра. Тогда R монотонно σ -полна.

Доказательство. Пусть $(a_n) \subset R$ — ограниченная монотонно возрастающая последовательность самосопряженных элементов. По теореме 4.7.4 [2] $A = R + iR$ — собственно бесконечная AW^* -алгебра. Тогда по теореме 2 алгебра A — монотонно σ -полна, следовательно, последовательность $(a_n) \subset A$ имеет точную верхнюю границу в A . Поскольку $a_n \in R$ ($n \in \mathbb{N}$), то $a \in R$, отсюда R — монотонно σ -полна. \square

Приведем два вспомогательных результата для получения основной теоремы.

Теорема 3. [4,5] Пусть A — AW^* -алгебра типа II. Если A обладает точным состоянием, то A является W^* -алгеброй.

Теорема 4. [2, Теорема 4.3.5] Вещественная AW^* -алгебра R является вещественной W^* -алгеброй тогда и только тогда, когда

1. R обладает отделяющим семейством нормальных состояний;

2. Её комплексификация $A = R + iR$ является AW^* -алгеброй.

Теорема 5. Пусть R - вещественный AW^* -фактор такой, что $A = R + iR$ - AW^* -алгебра. Пусть Q - абелева вещественная AW^* -подалгебра R , не являющаяся вещественной W^* -алгеброй. Тогда верны следующие утверждения:

1. R не является вещественной W^* -алгеброй;
2. R имеет тип Π_∞ или III;
3. R монотонно σ -полная вещественная C^* -алгебра;
4. Если R имеет точное состояние, то R - монотонно полно и имеет тип III.

Доказательство.

1). Если R — вещественная W^* -алгебра, то по утверждению 1 алгебра Q - вещественная W^* -алгебра, что противоречит изначальному условию. Следовательно, R не может быть вещественной W^* -алгеброй.

2). По следствию 4.6.12 [2] алгебра R не может иметь тип I, так как всякий вещественный AW^* -фактор типа I является вещественным W^* -фактором типа I. Рассмотрим два варианта доказательства для случая типа Π_1 :

(i) пусть R имеет тип Π_1 и $D : A \rightarrow [0, 1]$ размерностная функция на A . По теореме 1 (т.е. 1.2.1 из [5]) функция D даст строго положительную, вполне аддитивную меру на проекторах Q . Тогда Q обладает точным состоянием и по теореме 4 Q является вещественной W^* -алгеброй, который противоречит изначальному условию. Следовательно, R имеет тип Π_∞ или III.

(ii) Пусть R имеет тип Π_1 . Тогда по теореме 4.7.1.[2] алгебра $A = R + iR$ также имеет тип Π_1 . Так как $Q + iQ$ абелева AW^* -подалгебра алгебры A , не являющаяся W^* -алгеброй, то по предложению 1.1 [6] алгебра A не имеет тип Π_1 , что является противоречием. Тогда R также не имеет тип Π_1 . Следовательно, R имеет тип Π_∞ или III.

3). Так как по пункту 2) R - собственно бесконечна, то по следствию R - монотонно σ -полна.

4). Пусть ϕ - точное состояние на R . То по теореме 2 (Кристенсена-Педерсона) и по теореме 4, если R имеет точное состояние, то R - монотонно полно и имеет тип III. Тип Π_∞ - невозможен, так как, по теореме 3 вещественная AW^* -алгебра типа II с точным состоянием является W^* -алгеброй, что противоречит условию. \square

Далее рассмотрим интересные результаты для конечного AW^* -фактора типа Π_1 . Пусть, теперь N - $*$ -алгебра. Линейное отображение $\theta : N \rightarrow N$ называется $*$ -автоморфизмом алгебры N , если $\theta(x)^* = \theta(x^*)$ и $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$, для всех $x, y \in N$.

Каждый обратимый (или унитарный) элемент $u \in N$ определяет *-автоморфизм Adu на N как $Adu(x) := uxu^{-1}$, $x \in N$. Такие *-автоморфизмы называются внутренними *-автоморфизмами. Через $Aut(N)$ обозначается множество всех *-автоморфизмов алгебры N снабженное с топологией по точечной сходимости. Через $Int(N)$ обозначим группу всех внутренних *-автоморфизмов N и через $\overline{Int}(N)$ ее замыкание в $Aut(N)$. *-Автоморфизм θ называется аппроксимативно внутренним, если $\theta \in \overline{Int}(N)$. В работе [7] А.Конн дает характеристику аппроксимативно внутренних *-автоморфизмов W^* -фактора типа II_1 . В работе [8] Э.Штермер получил аналогичные результаты в вещественном случае. Здесь мы рассмотрим эти результаты для AW^* -фактора типа II_1 .

Теорема 6. Пусть R - вещественный AW^* -фактор типа II_1 такой, что $A = R + iR \subset B(H)$ - AW^* -фактор, где H - некоторое сепарабельное гильбертово пространство. Если $\theta \in Aut(A)$ удовлетворяет условию $\theta(R) = R$, то следующие условия эквивалентны

- (i) $\theta \in \overline{Int}(A)$;
- (ii) существует *-автоморфизм C^* -алгебры, порожденная алгебрами A и A' , который совпадает с θ на алгебре A и тождественно на A' ;
- (iii) существует ограниченная последовательность $(x_n) \subset R$, не сходящая сильно к нулю, такая, что $x_n a - \theta(a)x_n \rightarrow 0$ - сильно, для $\forall a \in A$;
- (iv) существует последовательность унитарных $(v_n) \subset R$ такая, что $\theta = \lim_n Adv_n$ в $Aut(A)$.

Отсюда получим следующие следствия

Следствие 1. Пусть $\theta \in Aut(A)$ удовлетворяет условию $\theta(R) = R$. Тогда из $\theta \in \overline{Int}(A)$ следует $\theta \in \overline{Int}(R)$, в частности, из $\theta \in Int(A)$ следует $\theta \in Int(R)$.

То есть, если θ - внутренний *-автоморфизм на $R + iR$ и $\theta(R) = R$, то существует унитарный элемент $v \in R$, такой, что $\theta = Adv$.

Следствие 2. Если H - вещественное гильбертово пространство и $B(H)$ - алгебра всех линейно ограниченных операторов на H , то всякий *-автоморфизм на $B(H)$ является внутренним.

Доказательство. Продолжим *-автоморфизм θ на $B(H_c) = B(H) + iB(H)$ как

$$\bar{\theta}(x + iy) = \theta(x) + i\theta(y),$$

где $H_c = H + iH$. Поскольку *-автоморфизм $\bar{\theta}$ является внутренним на $B(H_c)$ и $\bar{\theta}(B(H)) = B(H)$, то по следствию 1 *-автоморфизм θ является внутренним на $B(H)$. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Blackadar, D. Handelman, Dimension functions and traces on C^* -algebras, J. Funct. Anal. 45 (1982), 297340.
2. Sh.A. Ayupov, A.A. Rakhimov VDM Publishing House Ltd. Beau-Bassin, Germany, Bonn, 2010,

3. E.Christensen and G.K.Pedersen, Properly infinite AW^* -algebras are monotone sequentially complete Bull. London Math. Soc. 16 (1984) 407-410.
4. J.D.M. Wright, : On semi-finite AW^* -algebras. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 79, 443-445 (1976)
5. J.D.M. Wright On AW^* -algebras of finite type. J. London Math. Soc., Vol.2, 12, 431-439 (1976).
6. J. D. M. Wright, Hyperfiniteness in wild factors, J. Lond. Math. Soc. (2) 28 (1988), 492-502
7. A.Connes. Classification of injective facteurs. Ann. Math., 1976. Vol. 104. N 1. pp. 73-115.
8. E.Stormer. Real structure in the hyperfinite factor Vol. 47, No.1 Duke mathematical journal. 1980

REZYUME

Maqolada Rayt va Takenuchi tuzgan, W^* bolmagan, abel AW^* - qism algebraasi AW^* faktorlarning haqiqiy analogi beriladi, va aproksimativ, II_1 turdagi faktorli AW^* avtomorfizmlar ta'rifi beriladi

Kalit so'zlar: AW^* -algebralar, abel AW^* -subalgebralar, W^* -algebralar, *-avtomorfizmlar, holat, $B(H)$, to'g'ri cheksiz AW^* -algebralar

RESUME

In this paper we constructs a real analogue of the AW^* factors constructed by Wright and Takenouchi, with a non- W^* abelian AW^* -subalgebra and give a definition of approximate inner *-automorphisms of the AW^* factor of type II_1 .

Key words: AW^* -algebras, abelian AW^* -subalgebras, W^* -algebras, *-automorphisms, state, $B(H)$, properly infinite AW^* -algebras

УДК 517.95

НЕЙРОННЫЕ СЕТИ НА ОСНОВЕ РАДИАЛЬНО-БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ С МНОЖЕСТВЕННЫМИ ВЕСОВЫМИ СОЕДИНЕНИЯМИ ДЛЯ ЗАДАЧ КЛАССИФИКАЦИИ

Кудайбергенов К. К., Муминов З. И. *

РЕЗЮМЕ

Согласно последним исследованиям в области когнитивных наук и биологии, в основе биологических нейронов взаимодействие нейронов осуществляется с помощью нейротрансмиттеров, передающие сигналы между нейронами. Каждый биологический нейрон взаимодействует с другим, высвобождая разных типов нейротрансмиттеров, каждый из которых выполняет определенную функцию. Вдохновленная этими биологическими открытиями, в этой статье предлагается новая модель искусственной нейронной сети, расширяя количество соединения с одного до нескольких. Предполагается, что соединение между двумя узлами множественны, а именно, существует множество соединений между входным и скрытым узлом в радиальной базисной нейронной сети. Разные компоненты соответствуют различным нейротрансмиттерам, а количество соединений представляет количество категорий нейромедиаторов. Входные и выходные данные для каждой единицы в предлагаемой модели определяется эвристически, чтобы заставить эти нейротрансмиттеры взаимодействовать и конкурировать соответствующим образом. С биологической точки зрения, предлагаемая модель радиальной базисной нейронной сети гораздо больше иллюстрирует биологические нейронные сети. В этой статье рассматривается модель нейронной сети на радиальном базисе с множеством соединений между каждым входом и скрытым узлом. Основываясь на факты, что активация каждого скрытого модуля основана на ряде фильтров, с точки зрения новой структуры модели может улучшить интерпретируемость функций, изученных искусственной нейронной сетью. Вычислительные эксперименты с эталонными наборами данных на репозитории для машинного обучения показали, что производительность обычных нейронных сетей можно повысить за счет увеличения размерности соединений между нейронами, а концепция множественных соединений весовых коэффициентов предлагает новый подход к проектированию и архитектуре искусственных нейронных сетей.

Ключевые слова: радиальная базисная функция, радиальная базисная нейронная сеть, нейромедиатор, множественная связь, вес, скрытый слой, классификация.

Введение

Известно, что в основе всех моделей искусственных нейронных сетей (НС) лежит нейронная организация коры головного мозга [1]. Например, модели НС,

*Khudaybergenov K. K. – Kimyo International University in Tashkent, kabul85@mail.ru

такие как генеративная состязательная сеть [2], глубокая остаточная сверточная нейронная сеть [3], глубокая машина Больцмана [4], сверточная нейронная сеть [5], системы нечеткого вывода [12-14,17], многослойные нейронные сети (МНС) [19-21], нейронные сети глубокого доверия [22] и глубокий автоэнкодер [6] показали себя превосходно при обнаружении сложных структур на основе сенсорных входных данных и могут применяться для решения многих проблем и задач, связанных с искусственным интеллектом, таких как визуальное распознавание объектов [7,18,24-26], распознавание речи [8] и понимание естественного языка [9]. Однако процесс передачи сигнала между двумя узлами во всех этих моделях НС основан на одном соединении с некоторым весом. Точнее, некоторая нелинейная функция используется для активации выходного сигнала y_i блока i после его умножения на вес соединения $w_{i,j}$. Последующий модуль слоя j получает на вход полученное значение, и этот процесс продолжается до конца модели.

Однако биологические исследования [10,11] показали, что движение химических веществ, называемых нейротрансмиттерами, которые испускаются нейроном в пресинаптическом нервном окончании, является способом передачи данных между двумя соединенными нейронами. Следующий нейрон затем получает нейротрансмиттеры в специализированном месте, известном как рецептор. Двумя основными категориями традиционных нейротрансмиттеров являются крошечные молекулы нейротрансмиттеров и нейропептиды. Эти нейротрансмиттеры можно разделить на множество небольших органических молекул, таких как аминокислотные нейротрансмиттеры глутамат, биогенные амины дофамин, АТФ и другие. Нейропептиды, более важные, чем небольшие молекулы-передатчики, состоят из трех или более аминокислот. Кроме того, нейропептиды существуют в самых разных типах. По сути, нейрон взаимодействует с другим нейроном, высвобождая различные нейротрансмиттеры, каждый из которых выполняет определенную функцию.

В данной статье предлагается новый тип нейронной сети с радиальной базисной функцией с множественными связями (НСРБФ) путем расширения размеров связей между двумя единицами с одного до нескольких, что основано на принципе информационной связи между двумя нейронами [1], например, два нейрона передают сообщения, высвобождая несколько типов нейротрансмиттеров, а не единственный тип. Каждое отдельное соединение с множеством соединений в НСРБФ соответствует различным типам нейромедиаторов. В частности, связь между двумя соединенными блоками (узел) для новой модели является многомерной, тогда как для всех используемых в настоящее время нейросетевых моделей она является одномерной. В работе, эвристически определяется входные и выходные данные каждого скрытого блока в НСРБФ, чтобы обеспечить адаптивное взаимодействие и конкуренцию между двумя блоками.

НСРБФ имеет некоторые преимущества по сравнению с традиционными НС.

- В модели НСРБФ рассматривается разнообразие нейротрансмиттеров с биологической точки зрения. Это делает предлагаемую структуру НСРБФ

гораздо схожей на биологическую НС.

- Предложенную модель НСРБФ можно считать более точными моделями решения задач классификации по сравнению с традиционными РБФ-сетями.

Модель НСРБФ

В этом разделе представляется новая структура НС на основе РБФ для задач классификации. Давайте рассмотрим традиционную НСРБФ, который состоит из трех слоев. В общем, НСРБФ состоит из входного слоя, скрытого слоя РБФ и нелинейного выходного слоя. Общая структура РБФ сети, состоящей из трех слоев: I-входов, M-скрытых нейронов и K-выходов, изображена на рис. 1. Функция активации нейронов скрытого слоя обычно связана с Евклидовым расстоянием между точкой входных данных и ее центром. В основном выбирается функция Гаусса $\varphi(\mathbf{x}, c_m, \sigma_m)$ в качестве функции активации, которая определяется в следующей форме.

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{c}_m, \sigma_m) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_m\|^2}{2\sigma_m^2}\right) \quad (1)$$

где $\mathbf{x} \in R^I$ - входной вектор, $\mathbf{c}_m \in R^I$ - центр, и σ_m - ширина m -скрытого нейрона. $\|\cdot\|$ - евклидова норма. Для простоты обозначим все эти параметры как $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_M]$ с $\theta_m = [c_m, \sigma_m]$. Предположим, что имеется P пар выборок обучающих данных $\{(\mathbf{x}_p, d_p)\}_{p=1}^P$, где $d_p \in R^K$ - желаемые выходные значения для p -точки входных данных \mathbf{x}_p и K - количество классов.

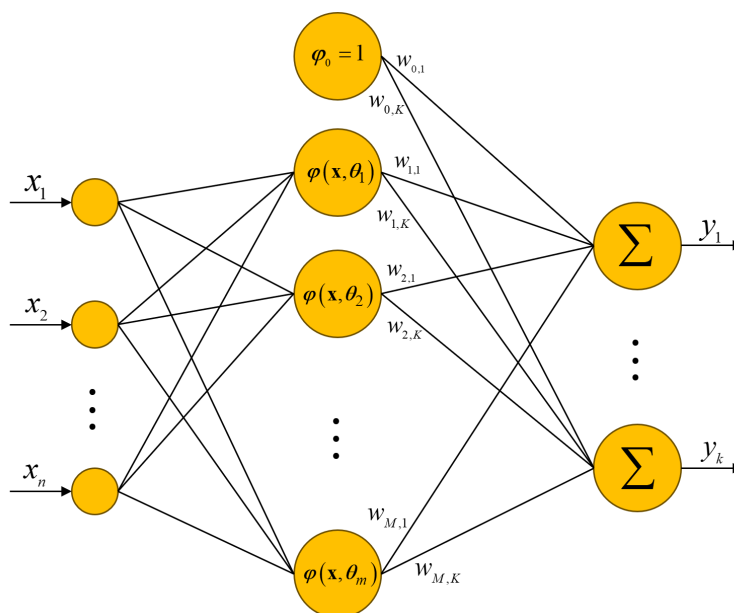


Рис. 5: Структура традиционной НСРБФ.

Согласно традиционной архитектуре НСРБФ, представленной на рис. 1, k -выход y_{pk} НСРБФ для входных данных x_p рассчитывается следующим образом

$$y_{pk} = w_{0,k} + \sum_{h=1}^H w_{h,k} \varphi(x_p, \theta_h) \quad (2)$$

где $w_{0,k}$ - параметр смещения k -выходного нейрона, $w_{m,k}$ - весовой параметр между k и m -скрытыми нейронами k -выходного блока. В этом случае выход для традиционной сети РБФ рассчитывается по формуле

$$Y = \Phi W \quad (3)$$

где $Y = [y_1, \dots, y_p]^T$ - желаемый результат с $P \times M$. $y_p \in R^K$ - искомый выходной вектор. x_p - входные данные, $\Phi = [1, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_H]$ - матрица размерности $K \times (M + 1)$.

В общем, основной результат данной статьи вытекает из архитектуры МНС, предложенной в [1]. Авторы показали, что модель МНС способна аппроксимировать любую непрерывную функцию на любом компактном подмножестве с заданной произвольной точностью. Они продемонстрировали, что НС с множеством весовыми связями и с любой функцией активации может аппроксимировать любую непрерывную функцию с произвольной степенью точности.

В этой статье расширяем вышеупомянутое свойство на НСРБФ на НС-классификаторы. А именно, строится НС с множественными связями между входом и скрытым блоком для НСРБФ для задач классификации и распознавания образов, а также показывается, что НСРБФ с функцией активации (1) может решать задачи классификации и распознавания образов с произвольной точностью.

Известно, что традиционные модели НС имеют только одну связь между двумя соединенными нейронами для интерпретации нейротрансмиттеров. С биологической точки зрения нейротрансмиттеры используются нервной системой для передачи данных между соединенными нейронами. Вдохновленные этой идеей, в данной работе в традиционной НС расширяется размерность соединения от одного до многомерного соединения. В качестве примера, предложенная модель НСРБФ для двумерного соединения, которая кодируется как НСРБФ-1-2Н2-1, как показана на рис. 2 (b). В этой модели имеется два соединения между входным блоком и скрытым блоком. На рис. 2(a), показано традиционная НСРБФ с четырьмя скрытыми блоками в скрытом слое.

Предположим, что у нас имеется несколько соединений между блоком ввода и блоком скрытого слоя.

Тогда, можно представить новую модель для модели НСРБФ следующим образом.

$$y_m = \sum_{m=1}^M \left(w_{0,m} + \sum_{h=1}^H w_{h,m} \varphi(\mathbf{x}, \theta_h) \right)$$

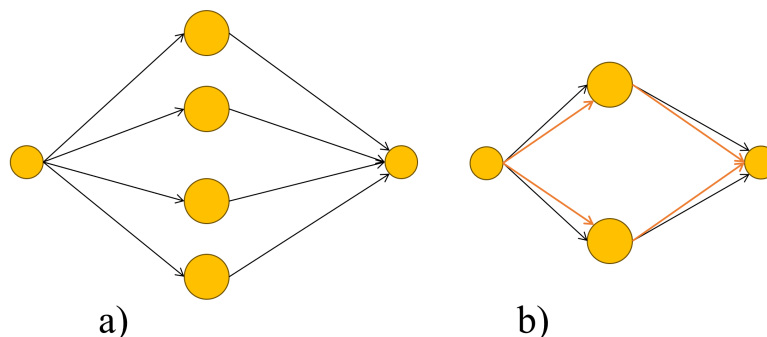


Рис. 6: (а) Структура традиционной НС прямого распространения 1-4-1. (б) Структура предложенного НСРБФ-1-2Н2-1.

где $h = 1, \dots, H$, – количество измерений, в которых соединения НСРБФ расширяются до двух соединений между скрытым блоком и выходным блоком. В данной работе рассматривается модель НСРБФ для задач классификации. Это указывает на то, что модель должна иметь K -выходные данные для K -классов и y_k - выходное прогнозируемое значение для k -класса. Например, на рис. 2(б) имеется два соединения между скрытым блоком и выходным блоком ($h = 2$).

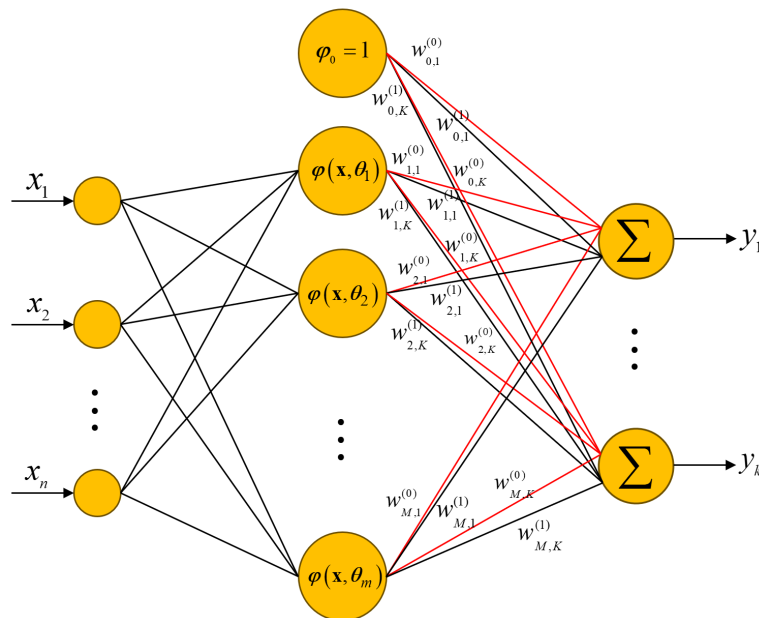


Рис. 7: Модельная структура предложена НСРБФ с двумерной связью.

Доказано, что традиционный РБФ со скрытым слоем и некоторыми скрытыми единицами в этом слое является идеальным универсальным аппроксиматором. Этот результат также применяется к предлагаемой модели НСРБФ. Как правило, модель НСРБФ со скрытым слоем, множеством связей между скрытой единицей и выходной единицей (рис. 3), которая содержит произвольное количество размерностей весов, также является идеальным универсальным аппроксиматором в $C(R^m)$. Доказательство представлено в следующем результате.

Здесь расширяем свойства аппроксимации традиционных сетей РБФ на НСРБФ для классифицирующих нейронных сетей. А именно, строится сеть РБФ с множеством соединений в скрытом блоке и блоке вывода (НСРБФ) для задач классификации и распознавания образов, а также показываем, что НСРБФ с любой радиальной базисной функцией может решать задачи классификации и распознавания образов с произвольной точностью.

В k -мерном пространстве \mathbb{R}^k рассмотрим евклидову норму

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k |x_i|^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_d).$$

Теорема 1. Пусть радиальная базисная функция $\varphi(\mathbf{x}, \theta_m^{(h)})$ - ограниченная и монотонно возрастающая функция. Пусть K - компактное подмножество в R^k , и $f(x)$ - вещественная непрерывная функция на K :

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$, существуют вещественные константы $w_{i,j}, \theta_j$, что удовлетворяет условию

$$\left\| f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H \left(w_{0,k}^{(h)} + \sum_{m=1}^M w_{m,k}^{(h)} \varphi(\mathbf{x}, \theta_m^{(h)}) \right) \right\|_C \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Если $H = 1$, то модель НСРБФ становится традиционной сетью модели РБФ и ее доказательство тривиально. Здесь необходимо рассмотреть случай, когда $H > 1$, поскольку предлагаемая модель НСРБФ имеет множество связей между скрытым блоком и выходным блоком.

Согласно универсальной аппроксимационной способности традиционной РБФ-сети, для любого $f \in C(x, R), \varepsilon > 0$, существуют $w_{m,1}, \theta_m \in R$ такой, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = w_{0,1} + \sum_{m=1}^M w_{m,1} \varphi(\mathbf{x}, \theta_m)$$

является аппроксимацией функции $f(\cdot)$.

Для каждого $k = 1, \dots, K$ определим отображение проекции $\pi_k : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом

$$\pi_k(x) = x_k, \quad x = (x_1, \dots, x_d).$$

Тогда для каждого $k = 1, \dots, K$ функция $f \circ \pi_k : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию все условия теоремы 2 из [15]. Тогда по теореме 2 для каждого $k = 1 \dots K$ и любого $f \in C(x, R^k), \varepsilon > 0$, существуют $w_{m,1}, \theta_m \in R$ для $m \in 1, \dots, M, h \in 1, \dots, H, k \in 1, \dots, K$, для которого

$$\left\| \pi_k(x) - \sum_{h=1}^H \left(w_{0,k}^{(h)} + \sum_{m=1}^M w_{m,k}^{(h)} \varphi(\mathbf{x}, \theta_m^{(h)}) \right) \right\| < \frac{\varepsilon}{k}. \quad (4)$$

Далее

$$\begin{aligned} & \left\| f(x) - \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H \left(w_{0,k}^{(h)} + \sum_{m=1}^M w_{m,k}^{(h)} \varphi(\mathbf{x}, \theta_m^{(h)}) \right) \right\| = \\ & \sqrt{\sum_{i=1}^K \left| \pi_i(f(x)) - \sum_{h=1}^H \left(w_{0,k}^{(h)} + \sum_{m=1}^M w_{m,k}^{(h)} \varphi(\mathbf{x}, \theta_m^{(h)}) \right) \right|^2} \stackrel{(4)}{<} \\ & \sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon^2}{k^2}} = \sqrt{k \frac{\varepsilon^2}{k^2}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Обучение НСРБФ

В этом разделе описывается процесс обучения предложенной модели НСРБФ. В общем, процесс обучения основан на обучающих свойствах традиционных сетей РБФ.

Предложенный НСРБФ с множеством соединений $H = 2$, обозначаемый НСРБФ-1-Н2-1, может быть обучен с помощью стандартного алгоритма обратного распространения ошибки с адаптацией к множественным соединениям. Пусть $\{x, d\}$ - обучающий пример, где $x = \{x_1, \dots, x_{n_0}\}^T$ - входные данные, n_0 - размерность входных вектора и $d = \{d_1, \dots, d_{n_{L+1}}\}^T$ - размерность n_{L+1} вывода. Функцию потерь с регуляризацией используем в следующей форме.

$$\begin{aligned} E = & - \sum_{j=1}^{n_{L+1}} (d_j \log_{10}(y_j^{L+1}) + (y_j^{L+1} - d_j) (1 - \log_{10}(y_j^{L+1}))) + \\ & \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^L \sum_{h=1}^H \sum_{i=1}^{n_{l-1}} \sum_{j=1}^{n_l} R(w_{i,j}^{(h)}) \end{aligned}$$

где

$$R(w_{i,j}^{(h)}) = \begin{cases} (w_{i,j}^{(h)})^2, & w_{i,j}^{(h)} < 0 \\ 0, & \end{cases}$$

λ - коэффициент регуляризации, неотрицательный.

Вычислительные эксперименты

В вычислительных экспериментах чтобы оценить производительность модели сравнивается точность предложенной модели НСРБФ с эталонными наборами данных который можно найти в репозитории машинного обучения [27]. Сравнение моделей проводилось в равных средах и с одинаковым размером параметров. Подобный размер параметров означает, что если имеется N скрытых нейронов в традиционной НС РБФ, что касается предлагаемой модели нейронной сети НСРБФ, понадобится взять $N/2$ скрытых нейронов. Например, на рис. 2 можно видеть две модели, имеющие одинаковое количество сетевых параметров. На рис. 4 показаны результаты сравнения с различными алгоритмами, использующими разные размеры обучающей выборки в наборе данных ORL.

На рис. 4 ось x указывает размер обучающей выборки набора данных (изображение/объект), а ось y указывает точность идентификации. Можно обнаружить, что предложенная структура сети НСРБФ с множествами соединениями демонстрирует лучшую производительность сходимости.

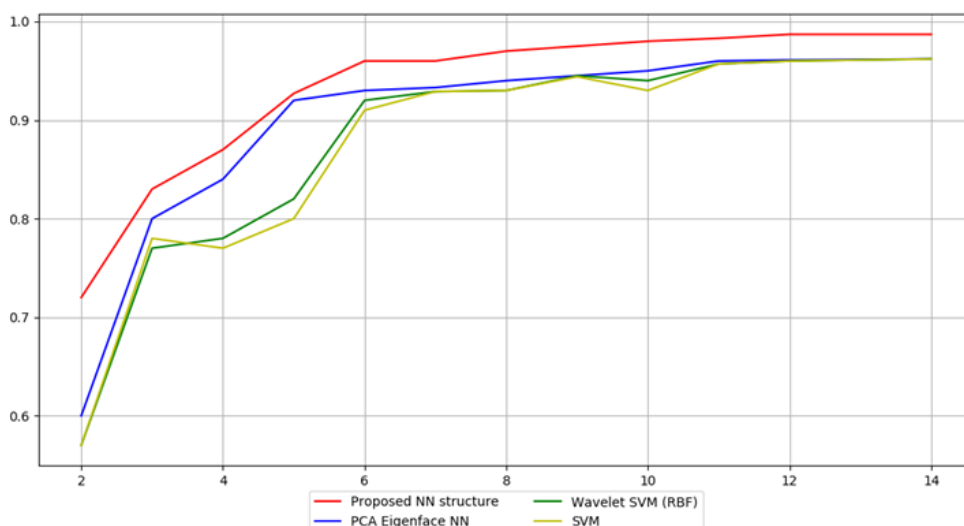


Рис. 8: Точность моделей с разными размерами обучения на наборе данных ORL.

Было использовано перекрестная проверка для обучения на эталонных наборах данных. В каждую эпоху использовалось половина выборок в классах наборов данных изображения лиц с более чем одной обучающей выборкой. Средняя точность предложенной модели и метода НС оценивается в 98,50% и 97,57%.

Тем временем проведено тест предложенной модель на наборе данных лиц LFW. Результаты сравнения приведены ниже в таблице 1.

Таблица 6: Результаты сравнения набора данных LFW с разными классификаторами.

Метод	Среднее точность
DeepFace-ensemble	0.9724 ± 0.0022
DeepID	0.9735 ± 0.0025
ConvNet-RBM	0.9227 ± 0.0037
Proposed NN model	0.9910 ± 0.0025

Из таблицы 2 видно, что предложенная архитектура НС всегда имеет самый высокий уровень распознавания по сравнению с другими методами. Более того, предлагаемая модель НСРБФ превосходит традиционную НСРБФ. Следовательно, можно утверждать, что предложенная модель гораздо более эффективна по сравнению с другими алгоритмами.

Выводы и дальнейшая работа

В этой статье предложено, что, согласно исследованиям в области нейробиологии, биологические нейроны находятся под влиянием взаимных нейротранс-

Таблица 7: Результаты распознавания различных наборов данных. Параметры обучения, включая количество эпох, фиксированы одинаковыми для всех моделей.

Метод	НС	SVM	Традиционная НСРБФ	Предложенная модель НСРБФ
ORL Face	92.50	94.00	95.12	98.25
LFW	95.25	95.50	96.92	99.10
FERET	86.11	74.07	90.81	97.80
SCface	91.50	93.40	93.79	97.30
AR Face	89.20	79.50	89.85	98.10
YALE	90.45	91.70	92.40	95.20

миттеров, то есть между двумя нейронами выделяются несколько нейротрансмиттеров разного значения и посылают информацию друг другу. На основе этого биологического подхода предложена новая модель НС, новый тип НС за счет увеличения количества весов связей между двумя нейронами. В математических моделях НС предполагается, что между каждым узлом имеется несколько каналов связи. Предложенная модель НС может быть получена как математическая модель, более близкая к биологическим нейронным сетям.

Благодарности Автор благодарит за поддержку гранта Республики Узбекистан на фундаментальные исследования (грант No IL-5421101773).

ЛИТЕРАТУРА

1. Jiangshe Z., Junying H., Junmin L. Neural network with multiple connection weights. Pattern Recognition. Volume 107, November 2020, 107481. doi:10.1016/j.patcog.2020.107481.
2. Yina G., Ting L., Xiaofei Z., Anhong W., Wenwu W. End-to-end translation of human neural activity to speech with a dual-dual generative adversarial network. Knowledge-Based Systems, 2023, 110837, doi:10.1016/j.knosys.2023.110837.
3. Milad M., Emami N., Sharifinasab M. A multiple-input deep residual convolutional neural network for reservoir permeability prediction, Geoenergy Science and Engineering, Volume 222, 2023, 211420. doi:10.1016/j.geoen.2023.211420.
4. Matias V., Vega L., Piantanida P. Information flow in Deep Restricted Boltzmann Machines: An analysis of mutual information between inputs and outputs. Neurocomputing, Volume 507, 2022, pp. 235-246. doi:10.1016/j.neucom.2022.08.014.
5. Yuesheng X., Haizhang Z. Convergence of deep convolutional neural networks. Neural Networks. Volume 153, 2022, pp. 553-563. doi:10.1016/j.neunet.2022.06.031.
6. Pengzhi L., Yan P., Jianqiang L. A comprehensive survey on design and application of autoencoder in deep learning. Applied Soft Computing. Volume 138. 2023, 110176, doi:10.1016/j.asoc.2023.110176.

7. Jatuporn T., Jiaping Z., Laurent I. Learning visual variation for object recognition. *Image and Vision Computing*. Volume 98, 2020, 103912. doi:10.1016/j.imavis.2020.103912.
8. Herrera C., Marjorie R. Brodbeck R. Cortical Networks for Recognition of Speech with Simultaneous Talkers. *Hearing Research*, 2023, 108856. doi:10.1016/j.heares.2023.108856.
9. Jackson P. Understanding understanding and ambiguity in natural language. *Procedia Computer Science*. Volume 169, 2020, pp. 209-225. doi:10.1016/j.procs.2020.02.138.
10. Kolb B., Wishaw I.Q., An introduction to brain and behavior, fourth ed., Worth Publishers, New York, NY, 2014. ISBN. 978-1429242288.
11. Lauder J.M., Neurotransmitters as growth regulatory signals: role of receptors and second messengers, *Trends Neurosci.* 16 (6) (1993) 233-240.
12. Ignatev, N.A., Rahimova, M.A. Formation and Analysis of Sets of Informative Features of Objects by Pairs of Classes. *Sci. Tech. Inf. Proc.* 49, 439–445 (2022). doi:10.3103/S0147688222060053.
13. Madrakhimov Sh.F., Rozikhodjaeva G.A., K.T. Makharov. Construction of fuzzy inference rules for medicine diagnostics problems. *Journal of Physics: Conf. Ser.* 2032 012032, 2021. doi:10.1088/1742-6596/2032/1/012032.
14. Madrakhimov Sh., Makharov K., Lolaev M. Data preprocessing on input. *AIP Conference Proceedings* 2365, 030003 (2021). doi:10.1063/5.0058132.
15. Funahashi K. On the approximate realization of continuous mappings by neural networks, 183-192, 1989. doi.org/10.1016/0893-6080(89)90003-8.
16. Marakhimov A.R., Kudaybergenov J.K., Khudaybergenov K.K., Ohundadaev U.R. A multivariate binary decision tree classifier based on shallow neural network. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2022, vol. 22, no. 4, pp. 725–733. doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-4-725-733.
17. Marakhimov A.R., Khudaybergenov K.K. A fuzzy MLP approach for nonlinear system identification. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 265, No. 1, July, 2022. doi:10.1007/s10958-022-06043-z.
18. Marakhimov, A. R., Khudaybergenov, K. K. Approach to the synthesis of neural network structure during classification. *International Journal of Computing*, 2020. 19(1), 20-26. <https://doi.org/10.47839/ijc.19.1.1689>.
19. Kurkova V. "Kolmogorov's theorem and multilayer neural networks," *Neural Networks*, Vol. 5, Issue 3, pp. 501-506, 1992.
20. Maiorov V., Pinkus A., "Lower bounds for approximation by MLP neural networks," *Neurocomputing*, Vol. 25, pp. 81-91, 1999.
21. Ismailov V.E. "On the approximation by neural networks with bounded number of neurons in hidden layers," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 417, Issue 2, pp. 963–969, 2014.

22. Hinton G.E. Deep belief networks, Scholarpedia 4 (5) (2009) 5947.
23. Salakhutdinov R., Hinton G.E., Deep Boltzmann machines, Artif. Intell. Stat. 5 (2) (2009) 448–455.
24. Bengio Y., Lamblin P., Popovici D., et al., Greedy layer-wise training of deep networks, Adv. Neural Inf. Process. Syst. 19 (2007) 153–160.
25. Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G.E., Imagenet classification with deep convolutional neural networks, Adv. Neural Inf. Process. Syst. 60 (6) (2017) 84–90.
26. Ptucha R., Petroski S.F., Pillai S., et al., Intelligent character recognition using fully convolutional neural networks, Pattern Recognit. 88 (2019) 604–613.
27. Machine Learning Repository. <https://archive.ics.uci.edu>

REZYUME

Kognitiv fan va biologiya sohasidagi so'nggi tadqiqotlarga ko'ra, biologik neyronlarning markazida neyronlarning o'zaro ta'siri neyronlar orasidagi signallarni uzatuvchi neurotransmitterlar yordamida amalga oshiriladi. Har bir biologik neyron boshqa turdagi neurotransmitterlarni chiqarish orqali o'zaro ta'sir qiladi, ularning har biri o'ziga xos funktsiyani bajaradi. Ushbu biologik kashfiyotlardan ilhomlangan ushbu maqola ulanishlar sonini birdan bir nechtagacha kengaytirish orqali yangi sun'iy neyron tarmoq modelini taklif qiladi. Ikki tugun o'rtasidagi bog'lanishlar bir nechta, ya'ni radial asosli neyron tarmog'ida kirish tuguni va yashirin tugun o'rtasida bir nechta ulanishlar mavjud deb taxmin qilinadi. Turli komponentlar turli neurotransmitterlarga mos keladi va birikmalar soni neurotransmitterlar toifalari sonini ifodalaydi. Taklif etilayotgan modeldagi har bir birlik uchun kirish va chiqishlar bu neurotransmitterlarning o'zaro ta'siri va shunga mos ravishda raqobatlashishi uchun evristik tarzda aniqlanadi. Biologik nuqtai nazardan, taklif qilingan radial asosli neyron tarmoq modeli biologik neyron tarmoqlarni ko'proq tasvirlaydi. Ushbu maqolada har bir kirish va yashirin tugun o'rtasida bir nechta ulanishlar bilan radial asosda neyron tarmoq modeli muhokama qilinadi. Har bir yashirin modulni faollashtirish bir qator filtrlarga asoslanganligidan kelib chiqqan holda, yangi model tuzilmasi nuqtai nazaridan sun'iy neyron tarmog'i tomonidan o'rganilgan funktsiyalarning izohlanishini yaxshilash mumkin. Mashinani o'rganish omborida benchmark ma'lumotlar to'plami bilan hisoblash tajribalari shuni ko'rsatdiki, an'anaviy neyron tarmoqlarning ishlashi neyronlar orasidagi ulanishlarning o'lchovlilikini oshirish orqali yaxshilanishi mumkin va bir nechta ulanish og'irliklari tushunchasi sun'iy neyronning dizayni va arxitekturasiga yangi yondashuvni taklif qiladi. tarmoqlar.

Kalit so'zlar: radial asosli funktsiya, radial asosli neyron tarmoq, neurotransmitter, ko'p ulanish, vazn, yashirin qatlam, tasnif.

RESUME

According to recent research in the field of cognitive science and biology, at the heart of biological neurons, the interaction of neurons is carried out using

neurotransmitters that transmit signals between neurons. Each biological neuron interacts with another by releasing different types of neurotransmitters, each of which performs a specific function. Inspired by these biological discoveries, this paper proposes a new artificial neural network model by expanding the number of connections from one to several. It is assumed that the connections between two nodes are multiple, that is, there are multiple connections between the input node and the hidden node in a radial basis neural network. Different components correspond to different neurotransmitters, and the number of compounds represents the number of categories of neurotransmitters. The inputs and outputs for each unit in the proposed model are determined heuristically to cause these neurotransmitters to interact and compete accordingly. From a biological point of view, the proposed radial basis neural network model is much more illustrative of biological neural networks. This article discusses a neural network model on a radial basis with multiple connections between each input and a hidden node. Based on the facts that the activation of each hidden module is based on a series of filters, in terms of the new model structure can improve the interpretability of the functions learned by the artificial neural network. Computational experiments with benchmark datasets on a machine learning repository have shown that the performance of conventional neural networks can be improved by increasing the dimensionality of connections between neurons, and the concept of multiple connection weights offers a new approach to the design and architecture of artificial neural networks.

Key words: radial basis function, radial basis neural network, neurotransmitter, multiple connection, weight, hidden layer, classification.

УДК 517.98

МАРШРУТЫ ТРАЕКТОРИЙ ОПЕРАТОРОВ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРА
ДЕЙСТВУЮЩИХ НА СИМПЛЕКСЕ S^4

Муминов. У. Р., * Ганиходжаев Р. Н. *

РЕЗЮМЕ

В данной работе изучается асимптотическое поведение траекторий операторов Лотки-Вольтерра действующих на симплексе S^4 . Вводится понятие биграфа для операторов Лотки-Вольтерра и исследуется порядок прохождения траекторий через определенные подмножества симплекса S^4 . Вводится также понятие маршрута траекторий.

Ключевые слова: Оператор Лотки-Вольтерра, ориентированные двудольные графы, инварианты траекторий, маршруты траекторий, α и ω множества траекторий.

1. Предварительные сведения

В ряде прикладных задач [1 – 4] точки симплекса

$$S^{m-1} = \left\{ x \in R^m : \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}$$

рассматриваются как состояния некоторой системы состоящей из m видов. При этом закон перехода системы из одного состояния в другое называется эволюционным оператором. В случае непрерывного времени изучаются интегральные линии-решения системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений называемых потоком, а в случае дискретного времени каскадом. Дискретный вариант оператора Лотки-Вольтерра определяется заданием кососимметрической матрицы $A = (a_{ij})$ и имеет следующий вид

$$x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}, \quad |a_{ki}| \leq 1, \quad (1)$$

где $x' = Vx$, $x \in S^{m-1}$.

Известно [9], что $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ гомеоморфизмом, а при условии $|a_{ki}| < 1$ $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ диффеоморфизм. Любая грань симплекса S^{m-1} , а также относительная внутренность грани инвариантна для V . Пусть $x^{(0)} \in \text{ri}S^{m-1}$, тогда $\{x^{(n)}\}$, где $x^{(n+1)} = Vx^{(n)}$, $n = 0, 1, \dots$ положительная, а $\{x^{(-n)}\}$, где $x^{(-n-1)} = V^{-1}x^{(-n)}$ отрицательная траектории. Положим $\alpha(x^{(0)})$ множество предельных точек отрицательной, а $\omega(x^{(0)})$ предельные точки положительной траекторий. Если $p = (p_1, \dots, p_m) \in S^{m-1}$, то функция $\varphi_p(x) = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \dots \cdot x_m^{p_m}$ непрерывна на S^{m-1} и так $\max_{x \in S^{m-1}} \varphi_p(x) = \varphi_p(p)$, причем $\{x \in S^{m-1} : \varphi_p(x) \geq c\}$ выпуклое замкнутое множество, при условии $c \leq \varphi_p(p)$.

*Муминов. У. Р. – Ферганский государственный университет, ulugbek.muminov.2020@mail.ru

*Ганиходжаев Р. Н. – Национальный университет Узбекистана

Согласно [9], множества

$$P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geq 0\} \neq \emptyset, Q = \{x \in S^{m-1} : Ax \leq 0\} \neq \emptyset$$

для любой кососимметрической матрицы A . Из неравенства Юнга [8] следует, что множество $\{x \in S^{m-1} : \varphi_p(x) \geq c\}$ инвариантно относительно отрицательных траекторий при $p \in P$ и всех допустимых значений c_1 . Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi_p(Vx) &= \varphi_p(x) \cdot \prod_{k=1}^m \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki}x_i\right)^{p_k} \leq \varphi_p(x) \cdot \left(\sum_{k=1}^m p_k \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki}x_i\right)\right) = \\ &= \varphi_p(x) \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m a_{ki}x_i p_k\right) = \varphi_p(x) \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m a_{ik}p_k\right) \cdot x_i\right) \leq \varphi_p(x), \end{aligned} \quad (2)$$

так как $a_{ik} = -a_{ki}$. Следовательно $\varphi_p(x) \geq \varphi_p(Vx)$, т.е. $\varphi_p(V^{-1}x) \geq \varphi_p(x)$.

Замечание. Ожидаемое утверждение об инвариантности множества $\{x \in S^{m-1} : \varphi_q(x) \geq c_2, q \in Q\}$ относительно положительных траекторий неверно. Очевидно неравенство $x'_k > x_k$ равносильно неравенству $\sum_{i=1}^m a_{ki}x_i > 0$. Поэтому для любой сигнатуры $\delta = (+ - \dots +)$ определим множество $x \in S^{m-1}$ таких, что $x'_k > x_k$, если на k том месте сигнатуры находится знак $+$ и обратно. Пусть F_δ замыкание этого множества. Ясно, что F_δ замкнутый и выпуклый многогранник, как пересечение замкнутых полупространств (возможно пустой). Например, для $V : S^2 \rightarrow S^2$ определённого равенствами

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 + x_2 + x_3), \\ x'_2 = x_2(1 - x_1 + x_3), \\ x'_3 = x_3(1 - x_1 - x_2) \end{cases}$$

возможны только лишь две сигнатуры $\delta_1 = (+ + -)$ и $\delta_2 = (+ - -)$, соответствующие F_1 и F_2 изображение на рис.1.

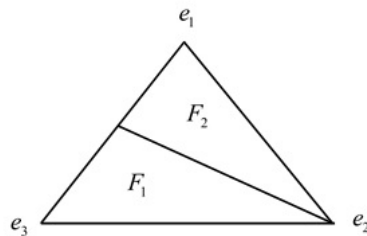


Рис.1.

Пусть $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ оператор Лотки-Вольтерра, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ возможные сигнатуры и F_1, F_2, \dots, F_k соответствующие многогранники.

1) Если $x \in riF_i$, где riF_i -относительная внутренность, то существует окрестность \mathcal{U}_x такая, что $\mathcal{U}_x \cap S^{m-1} \subset F_i$. Следовательно, многогранники F_i имеют размерность $m - 1$.

2) $\bigcup_{i=1}^k F_i = S^{m-1}, riF_i \cap riF_j = \emptyset$, при $i \neq j$.

3) Если $x \in \partial F_i$, то $x_j' = x_j$ хотя бы для одного j . Поэтому $Fix(V) \subset \bigcup_{i=1}^k \partial F_i$.

4) Пересечение любых двух многогранников либо пусто, либо является общей гранью.

Определение 1. Пусть δ_1 и δ_2 сигнатуры. Число несовпадающих «координат» назовём расстоянием $\rho(\delta_1, \delta_2)$. Очевидно, $\rho(\delta_1, \delta_2)$ метрика. Скорость отображения V в точке x определим равенствам

$$v(x) = d(x, Vx) = \sum_{i=1}^m |x_i' - x_i|.$$

Определение 2. Отображения V_1 и V_2 называются топологически эквивалентными если существует гомеоморфизм φ такой, что $V_1 \circ \varphi = \varphi \circ V_2$. Пусть $0 < \varepsilon \leq 1$ и $V_\varepsilon : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ определен равенствами

$$x'_k = x_k \left(1 + \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}. \tag{3}$$

Тогда отображения V и V_ε топологически эквивалентны, так как

$$V_\varepsilon = \varepsilon^{-1} V(\varepsilon x) \tag{4}$$

Следовательно, в случае необходимости, скорость каждой точки можно считать достаточно малым.

Определение 3. Последовательность прохождения траектории по многогранникам $\{F_i\}$ назовём маршрутом.

Определение 4. Пусть $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ -отрезок положительной траектории, причём n_i из этих точек принадлежат многограннику F_i ($i = \overline{1, k}$). Если $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n_i}{n} = \nu_i$ существует, то ν_i назовём долей нахождения положительной траектории на множестве F_i . Пусть $V : S^2 \rightarrow S^2$ задан равенствами

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 + x_2 - x_3), \\ x'_2 = x_2(1 - x_1 + x_3), \\ x'_3 = x_3(1 + x_1 - x_2) \end{cases} \tag{5}$$

Известно [10], что положительные траектории не сходятся, $\alpha(x^{(0)}) \in \partial S^2$ бесконечное множество, более того, средние по Чезаро $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x^{(i)}$ также не сходятся. Однако, отрицательные траектории сходятся $\alpha(x^{(0)}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. В этом случае возможны следующие сигнатуры $\delta_1 = (+ + -)$, $\delta_2 = (+ - -)$, $\delta_3 = (- + -)$, $\delta_4 = (- - +)$, $\delta_5 = (- + +)$, $\delta_6 = (+ - +)$ и соответствующие им многоугольники F_1, \dots, F_6 изображены на рис.2.

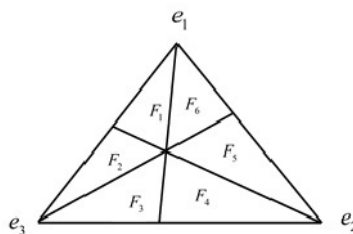


Рис.2.

Существует только лишь один (циклический) маршрут $V : F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3 \rightarrow F_4 \rightarrow F_5 \rightarrow F_6 \rightarrow F_1$. Согласно [10] "время" пребывания траектории на F_i растет быстрее любой геометрической прогрессии. Отсюда как следствие получаем, что доля пребывания траектории на F_i не существует и ν_i плотно на отрезке $[0, 1]$, для всех $i = \overline{1, 6}$.

Известно [6], что каждая кососимметрическая матрица A в соответствие со знаками a_{ki} определяет ориентированный граф. Если $a_{ki} \neq 0$ при $k \neq i$, то ориентированный граф называется турниром. Динамика траекторий отображения Лотки-Вольтерра в случае турниров изучены в работах [6].

Определение 5. [5] Ориентированный граф называется двудольным или биграфом, если его вершины можно разбить на два непустых класса I и II так, что вершины любого ребра принадлежат различным классам. Биграф называется полным, если любая вершина из класса I смежна с каждой вершиной из класса II . В данной работе изучается динамика траекторий отображений Лотки-Вольтерра действующих на симплексе S^4 в случае когда кососимметрическая матрица определяет полный ориентированный биграф.

2. Динамика траекторий отображений Лотки-Вольтерра действующих на симплексе S^4 .

1) Пусть e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 – вершины S^4 , $I = \{e_1\}$ и $II = \{e_2, e_3, e_4, e_5\}$ и матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b & c & -d \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 < a, b, c, d \leq 1$$

соответствующий биграф G_A .

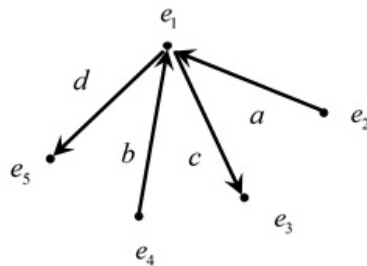


Рис.3.

В этом случае $V : S^4 \rightarrow S^4$ задается равенствами

$$V : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 + ax_2 - bx_3 + cx_4 - dx_5), \\ x'_2 = x_2(1 - ax_1), \\ x'_3 = x_3(1 + bx_1), \\ x'_4 = x_4(1 - cx_1), \\ x'_5 = x_5(1 + dx_1). \end{cases} \quad (6)$$

Грань симплекса S^4 определяется как выпуклая оболочка некоторых вершин, например, $\Gamma_{234} = \text{co}\{e_2, e_3, e_4\}$. Пусть

$$M_1 \left(0, \frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}, 0, 0 \right), \quad M_2 \left(0, \frac{d}{a+d}, 0, 0, \frac{a}{a+d} \right),$$

$$M_3 \left(0, 0, \frac{c}{b+c}, \frac{b}{b+c}, 0 \right), \quad M_4 \left(0, 0, 0, \frac{d}{c+d}, \frac{c}{c+d} \right).$$

Легко проверить, что эти точки компланарны, т.е. лежат на одной плоскости и выпукло независимы. В данном случае возможны только лишь две сигнатуры $\delta_1 = (- - + - +)$ и $\delta_2 = (+ - + - +)$. Решив соответствующие неравенства получаем

$$F_1 = \text{co}\{e_1, e_3, e_5, M_1, M_2, M_3, M_4\},$$

$$F_2 = \text{co}\{e_1, e_2, e_4, M_1, M_2, M_3, M_4\},$$

$$P = \{x \in S^4 : Ax \geq 0\} = \text{co}\{e_2, e_4, M_1, M_2, M_3, M_4\},$$

$$Q = \{x \in S^4 : Ax \leq 0\} = \text{co}\{e_3, e_5, M_1, M_2, M_3, M_4\}.$$

Теорема 1. Любая траектория отображения $V : S^4 \rightarrow S^4$ сходится, причем $\alpha(x^{(0)}) \in P$, $\omega(x^{(0)}) \in Q$, маршрут положительной траектории $V : F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow Q$, маршрут отрицательной траектории $V^{-1} : F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow P$.

Доказательство. Из равенства (6) $x'_3 = x_3(1 + bx_1)$ имеем

$$x_3^{(n)} = x_3^{(n-1)} \left(1 + bx_1^{(n-1)} \right) = x_3^{(n-2)} \left(1 + bx_1^{(n-2)} \right) \left(1 + bx_1^{(n-1)} \right) = \dots = x_3^{(0)} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + bx_1^{(k)} \right).$$

Согласно неравенству Бернулли находим

$$x_3^{(0)} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + bx_1^{(k)} \right) \geq x_3^{(0)} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + bx_1^{(k)} \right),$$

поэтому ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x_1^{(k)}$ сходится, т.е. $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_1^{(k)} = 0$. Таким же образом из $x'_2 = x_2(1 - ax_1)$ получаем $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_1^{(-k)} = 0$. Докажем, что $V(F_1) \subset F_1$. Учитывая сигнатуру δ_1 достаточно показать, что неравенства $ax_2 - bx_3 + cx_4 - dx_5 \leq 0$ следует $ax'_2 - bx'_3 + cx'_4 - dx'_5 \leq 0$. Действительно,

$$ax'_2 - bx'_3 + cx'_4 - dx'_5 = ax_2(1 - ax_1) - bx_3(1 + bx_1) + cx_4(1 - cx_1) - dx_5(1 + dx_1) =$$

$$= ax_2 - bx_3 + cx_4 - dx_5 - (a^2x_2 + b^2x_3 + c^2x_4 + d^2x_5) \cdot x_1 \leq 0.$$

Очевидно, если $\{x^{(n)}\}$ подчиняется сигнатуре δ_1 , то траектория сходится. Вычислив спектр якобиан в неподвижных точках находим, что только лишь точки Q являются притягивающими. Следовательно, $\omega(x^{(0)}) \in Q$. Заметим, что из $ax'_2 - bx'_3 + cx'_4 - dx'_5 \geq 0$

следует $ax_2 - bx_3 + cx_4 - dx_5 \geq 0$, поэтому $V^{-1}(F_2) \subset F_2$ и $\alpha(x^{(0)}) \in P$. Следовательно, маршрут траекторий $V : F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow Q, V^{-1} : F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow P$.

Замечание. Остальные случаи при биграфе с $I = \{e_1\}, II = \{e_2, e_3, e_4, e_5\}$ исследуются аналогичным образом. Топологически различные поведение траекторий наблюдаются для биграфа с $I = \{e_1, e_2\}, II = \{e_3, e_4, e_5\}$.

2) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & -b & c \\ 0 & 0 & d & -e & f \\ -a & -d & 0 & 0 & 0 \\ b & e & 0 & 0 & 0 \\ -c & -f & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 < a, b, c, d, e, f \leq 1.$$

Отображение Лотки-Вольтерра $V : S^4 \rightarrow S^4$ имеет вид

$$V : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 + ax_3 - bx_4 + cx_5), \\ x'_2 = x_2(1 + dx_3 - ex_4 + fx_5), \\ x'_3 = x_3(1 - ax_1 - dx_2), \\ x'_4 = x_4(1 + bx_1 + ex_2), \\ x'_5 = x_5(1 - cx_1 - fx_2). \end{cases} \quad (7)$$

i) Пусть $ae = bd$ и $bf = ce$. В этом случае возможны только лишь две сигнатуры $\delta_1 = (- - - + -)$ и $\delta_2 = (+ + - + -)$. Если $M_1(0, 0, \frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}, 0), M_2(0, 0, 0, \frac{c}{b+c}, \frac{b}{b+c})$, то решив соответствующие неравенства получаем

$$F_1 = co\{e_1, e_2, e_4, M_1, M_2\}, F_2 = co\{e_1, e_2, e_3, e_5, M_1, M_2\},$$

$$P = \{x \in S^4 : Ax \geq 0\} = co\{e_3, e_5, M_1, M_2\}, Q = \{x \in S^4 : Ax \leq 0\} = co\{e_4, M_1, M_2\}.$$

Теорема 2. Любая траектория сходится, причем $\alpha(x^{(0)}) \in P, \omega(x^{(0)}) \in Q$.

Доказательство. Заметим, что $V(F_2) \subset F_2$ и $V^{-1}(F_1) \subset F_1$. Действительно, из неравенств

$$\begin{cases} ax_3 - bx_4 + cx_5 \leq 0, \\ dx_3 - ex_4 + fx_5 \leq 0 \end{cases}$$

следует, что

$$\begin{cases} ax'_3 - bx'_4 + cx'_5 \leq 0, \\ dx'_3 - ex'_4 + fx'_5 \leq 0 \end{cases}$$

следовательно многогранник F_2 инвариантен при отображении V . Пользуясь неравенством Бернулли получаем $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_2^{(n)} = 0$. Таким образом $\omega(x^{(0)}) \in Q$. Аналогичные рассуждения показывают, что $V^{-1}(F_1) \subset F_1, \alpha(x^{(0)}) \in P$. Маршрут положительной траектории $V : F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow Q$, отрицательной траектории $V^{-1} : F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow P$. В данном случае биграф и множества P и Q изображены на рис.4.

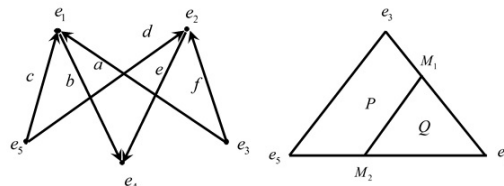


Рис.4.

ii) Пусть $bd > ae$ и $ce > bf$. Отметив точки $M_1(0, 0, \frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}, 0)$, $M_2(0, 0, \frac{e}{d+e}, \frac{d}{d+e}, 0)$, $M_3(0, 0, 0, \frac{f}{e+f}, \frac{e}{e+f})$, $M_4(0, 0, 0, \frac{c}{b+c}, \frac{b}{b+c})$ получаем следующую картину

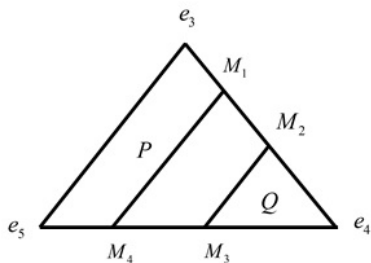


Рис.5.

Ясно, что $\Gamma_{345} \subset Fix(V)$, т.е. грань Γ_{345} состоит из неподвижных точек. $P = co\{e_3, e_5, M_1, M_4\}$, $Q = co\{e_4, M_2, M_3\}$, отрезки M_1M_4 и M_2M_3 не пересекаются. Вычислив спектр якобиана получим, что множество Q состоит из аттракторов (притягивающих неподвижных точек), множество P состоит репеллеров (отталкивающих неподвижных точек), четырехугольник $co\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ состоит из седловых точек. Возможны только лишь три сигнатуры $\delta_1 = (+ + - + -)$, $\delta_2 = (- + - + -)$, $\delta_3 = (- - - + -)$ и соответствующие многогранники $F_1 = co\{e_1, e_2, e_3, e_5, M_1, M_4\}$, $F_2 = co\{e_1, e_2, M_1, M_2, M_3, M_4\}$, $F_3 = co\{e_1, e_2, e_4, M_2, M_3\}$. Также, как в теореме 2 получаем

$$V(F_3) \subset F_3, V^{-1}(F_1) \subset F_1.$$

Отметим, что пересечение любой траектории с многогранником всегда конечно. Таким образом, маршрут траекторий $V : F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3 \rightarrow Q$ и $V^{-1} : F_3 \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow P$.

iii) Пусть $bd < ae$, $ce > bf$. В этом случае отрезки M_1M_4 и M_2M_3 пересекаются в точке M_5 (рис. 6).

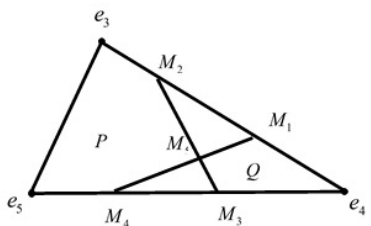


Рис.6.

В добавление к предыдущему появляется еще один многогранник. Итак,

$$F_1 = co\{e_1, e_2, e_3, e_5, M_2, M_4, M_5\}, F_2 = co\{e_1, e_2, M_1, M_2, M_5\},$$

$$F_3 = co\{e_1, e_2, M_3, M_4, M_5\}, F_4 = co\{e_1, e_2, e_4, M_1, M_3, M_5\}.$$

Также как и выше $V(F_4) \subset F_4$, $V^{-1}(F_1) \subset F_1$. Простые вычисления показывают, что никакая точка из F_2 не может перейти в F_3 при отображении V , и обратно, переход из F_3 в F_2 невозможен. Следовательно, существуют два маршрута $V : F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_4 \rightarrow Q$ и $V : F_1 \rightarrow F_3 \rightarrow F_4 \rightarrow Q$, для обратного отображения также получаем $V^{-1} : F_4 \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow P$, $V^{-1} : F_4 \rightarrow F_3 \rightarrow F_1 \rightarrow P$.

1) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & -b & c \\ 0 & 0 & -d & e & -f \\ -a & d & 0 & 0 & 0 \\ b & -e & 0 & 0 & 0 \\ -c & f & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 < a, b, c, d, e, f \leq 1.$$

Тогда $V : S^4 \rightarrow S^4$ имеет вид

$$V : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 + ax_3 - bx_4 + cx_5), \\ x'_2 = x_2(1 - dx_3 + ex_4 - fx_5), \\ x'_3 = x_3(1 - ax_1 + dx_2), \\ x'_4 = x_4(1 + bx_1 - ex_2), \\ x'_5 = x_5(1 - cx_1 + fx_2). \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим случай когда $ae = bd$ и $af = cd$. Тогда $bf = ce$. Введем обозначения $M_1\left(\frac{d}{a+d}, \frac{a}{a+d}, 0, 0, 0\right)$, $M_2\left(0, 0, \frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}, 0\right)$, $M_3\left(0, 0, 0, \frac{c}{b+c}, \frac{b}{b+c}\right)$. Решив необходимые неравенства получаем

$$P = \{x \in S^4 : Ax \geq 0\} = Q = \{x \in S^4 : Ax \leq 0\} = Ker A \cap S^4 = co\{M_1, M_2, M_3\}.$$

Вычислив якобиан $J(V)$ в неподвижных точках $co\{M_1, M_2, M_3\}$ находим уравнение для собственных значений в виде

$$(1 - \lambda)^3 \left((1 - \lambda)^2 + a^2 x_1 x_3 + b^2 x_1 x_4 + c^2 x_1 x_5 + d^2 x_2 x_3 + e^2 x_2 x_4 + f^2 x_2 x_5 \right) = 0. \quad (9)$$

Следовательно, все неподвижные точки из $co\{M_1, M_2, M_3\}$ являются репеллерами, а все остальные неподвижные точки седловые. Из уравнения (9) получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, λ_4 и λ_5 комплексные числа, причем $|\lambda_4| = |\lambda_5| > 1$. Для отображения Лотки-Вольтерра реализуются только лишь 4 сигнатуры $\delta_1 = (+ - - + -)$, $\delta_2 = (+ - + - +)$, $\delta_3 = (- + + - +)$, $\delta_4 = (- + - + -)$ и соответствующие им многогранники имеют вид

$$F_1 = co\{e_1, e_3, e_5, M_1, M_2, M_3\}, F_2 = co\{e_2, e_3, e_5, M_1, M_2, M_3\},$$

$$F_3 = co\{e_2, e_4, M_1, M_2, M_3\}, F_4 = co\{e_1, e_4, M_1, M_2, M_3\}.$$

Положительные траектории не сходятся и маршрут траектории циклический $V : F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3 \rightarrow F_4 \rightarrow F_1$, причем $\omega(x^{(0)}) \in \partial S^4$. Маршрут отрицательных траекторий также циклический, однако, отрицательные траектории всегда сходятся $V^{-1} : F_4 \rightarrow F_3 \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_4$, причем $\alpha(x^{(0)}) \in Q$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Murray J. D. Mathematical biology, Springer, 2009. –P. 776.
2. Brauer F., Castillo-Chaves C. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Springer, New York Dordrecht Heidelberg London, 2012. –P.512.
3. Rost G., Wu J. SEIR epidemiological model with varying infectivity and infinite delay, Mathematical biosciences and engineering, 2008, 5(2). p. 389-402.
4. Murray J. D. On a necessary condition for the ergodicity of quadratic operators defined on a two-dimensional simplex, Russ, Math. Surv, 2004, 59(3).
5. Harary F., Palmer E. M. Graphical enumeration, Amsterdam, Elsevier, 1973, p. 286.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц, М., Наука, 1966.
7. Маршалл А., Олкин И. Неравенств, М., Мир, 1983.
8. Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства, - М., 1948.
9. Eshmatova D. B., Tadzhieva M. A., Ganikhodzhaev, R.N., Degenerate cases in Lotka-Volterra systems, AIP Conference Proceedings. 2023, 2781, 020034-1-8 (3. Scopus. IF=0.16).
10. Захаревич М.И. О поведении траекторий и эргодической гипотезе для квадратичных отображений симплекса. // Успехи мат. наук, - 1978, - том 33, No 6. - с. 207-208.

REZYUME

Ushbu maqolada biz simpleksda Lotka-Volterra operatorlari traektoriyalarining asimptotik harakatini o'rganamiz. Lotka-Volterra operatorlari uchun bigraf tushunchasi kiritilgan va traektoriyalarning simpleksning ma'lum kichik to'plamlari orqali o'tish tartibi o'rganilgan. Traektoriyalar marshruti tushunchasi ham kiritilgan.

Kalit so'zlar: Lotka-Volterra operatori, bigraf, traektoriya invariantlari, traektoriya marshrutlari, va traektoriyalar to'plami.

RESUME

In this paper, we study the asymptotic behavior of the trajectories of Lotka-Volterra operators acting on the simplex S^4 . The concept of a bigraph is introduced for Lotka-Volterra operators and the order of passage of trajectories through certain subsets of the simplex S^4 is studied. The concept of trajectory route is also introduced.

Key words: Operator Lotka-Volterra, oriented bipartite graphs, trajectory invariants, trajectory routes, α and ω sets of trajectories.

УДК 517.55

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БЕННИ-ЛЮКА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рахмонов Ф. Д. *

РЕЗЮМЕ

Аннотация: В двумерной области рассматривается уравнение в частных производных типа Бенни-Люка четного высокого порядка с условиями в интегральной форме. Изучается однозначная разрешимость нелинейной обратной задачи. Решение данного уравнения в частных производных изучается в классе регулярных функций. Используются метод разделения переменных (метод рядов Фурье). Обратная задача сводится к решению систем двух нелинейных интегральных уравнений. При доказательстве существования и единственности коэффициента Фурье от неизвестной функции применяется метод последовательного приближения в сочетании его с методом сжимающего отображения. Используется неравенство Коши-Шварца и неравенство Бесселя при доказательстве абсолютной и равномерной сходимости полученных рядов Фурье.

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение типа Бенни-Люка, интегральные условия, обратная задача, нелинейное функциональное уравнение, нелокальная краевая задача, метод рядов Фурье, неравенство Коши-Шварца и неравенство Бесселя.

Большой интерес с точки зрения приложений представляют уравнения типа Бенни-Люка [1-20] и приложения интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма [21-36].

Исследуется классическая разрешимость нелокальной краевой задачи для дифференциального уравнения типа Бенни-Люка высокого четного порядка. В двумерной области $\Omega = \{(t, x, y) \mid 0 < t < T, 0 < x, y < l\}$ рассматривается уравнение

$$D_{t,x,y}^{2+4k+4k} [U(t, x, y)] = \alpha(t) \left[\beta(x, y) + f \left(x, y, \int_0^l \int_0^l \Theta(\eta, \xi, \beta(\eta, \xi)) d\eta d\xi \right) \right], \quad (1)$$

где

$$D_{t,x,y}^{2+4k+4k} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon(t)(-1)^k \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}} \right) - \\ - \omega(t) \left[(-1)^k \left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}} \right) + \varepsilon(t) \left(\frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}} + \frac{\partial^{4k}}{\partial y^{4k}} \right) \right],$$

T и l даны положительные действительные числа, k заданное положительное целое число, $\varepsilon(t)$, $\omega(t)$, $\alpha(t) \in C(\Omega_T)$ – непрерывные функции, $f(x, y, \beta) \in C_{x,y}^{4k}(\Omega_l^2 \times R)$,

*Рахмонов Ф. Д. – Национальный университет Узбекистана, farhod_frd@bk.ru

$\int_0^l \int_0^l |\Theta(\eta, \xi, \beta(\eta, \xi))| d\eta d\xi < \infty, \Theta(x, y, \beta) \in C(\Omega_l^2 \times R), \Omega_T \equiv [0; T], (x, y) \in \Omega_l^2 \equiv [0; l]^2, \beta(x, y) \in C(\Omega_l^2)$ – функция переопределения.

Постановка задачи. Найдем пару функций $\{U(t, x, y); \beta(x, y)\}$, первая из которых удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), следующим нелокальным условиям

$$U(T, x, y) + \int_0^T U(t, x, y) dt = \varphi_1(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq l, \quad (2)$$

$$U_t(T, x, y) + \int_0^T U_t(t, x, y) t dt = \varphi_2(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq l, \quad (3)$$

условиям типа Дирихле для $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} u(t, 0, y) &= u(t, l, y) = u(t, x, 0) = u(t, x, l) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, 0, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, l, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x, 0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x, l) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, 0, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, l, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, x, 0) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, x, l) = \\ &= \dots = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} u(t, 0, y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} u(t, l, y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} u(t, x, 0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} u(t, x, l) = \\ &= \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} u(t, 0, y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} u(t, l, y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} u(t, x, 0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} u(t, x, l) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

класс функций

$$U(t, x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C_{t,x,y}^{2,4k,4k}(\Omega) \cap C_{t,x,y}^{2+2k+0}(\Omega) \cap C_{t,x,y}^{2+0+2k}(\Omega), \quad (5)$$

$$\beta(x, y) \in C(\Omega_l^2)$$

и дополнительное условие

$$U(t_0, x, y) = \psi(x, y), \quad 0 < t_0 < T, \quad 0 \leq x, y \leq l, \quad (6)$$

где $\varphi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$), $\psi(x, y)$ – заданные гладкие функции и имеют место условия

$$\begin{aligned} \varphi_i(0, y) &= \varphi_i(l, y) = \varphi_i(x, 0) = \varphi_i(x, l) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_i(0, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_i(l, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_i(x, 0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_i(x, l) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi_i(0, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi_i(l, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi_i(x, 0) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi_i(x, l) = \\ &= \dots = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \varphi_i(0, y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \varphi_i(l, y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \varphi_i(x, 0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \varphi_i(x, l) = \\ &= \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} \varphi_i(0, y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} \varphi_i(l, y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} \varphi_i(x, 0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} \varphi_i(x, l) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \psi(0, y) = \psi(l, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, l) = \\
& = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(0, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(l, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, 0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, l) = \\
& = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(0, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(l, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(x, 0) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(x, l) = \\
& = \dots = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \psi(0, y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \psi(l, y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \psi(x, 0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \psi(x, l) = \\
& = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} \psi(0, y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} \psi(l, y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} \psi(x, 0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} \psi(x, l) = 0.
\end{aligned}$$

Мы также предполагаем, что для заданных функций $\beta(x, y)$, $f(x, y, \cdot)$ верны следующие граничные условия

$$\begin{aligned}
& \beta(0, y) = \beta(l, y) = \beta(x, 0) = \beta(x, l) = \\
& = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta(0, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta(l, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta(x, 0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta(x, l) = \\
& = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \beta(0, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \beta(l, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \beta(x, 0) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \beta(x, l) = \\
& = \dots = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \beta(0, y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \beta(l, y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \beta(x, 0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \beta(x, l) = \\
& = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} \beta(0, y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} \beta(l, y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} \beta(x, 0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} \beta(x, l) = 0, \\
& f(0, y, \cdot) = f(l, y, \cdot) = f(x, 0, \cdot) = f(x, l, \cdot) = \\
& = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0, y, \cdot) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(l, y, \cdot) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, 0, \cdot) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, l, \cdot) = \\
& = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(0, y, \cdot) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(l, y, \cdot) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, 0, \cdot) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, l, \cdot) = \\
& = \dots = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} f(0, y, \cdot) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} f(l, y, \cdot) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} f(x, 0, \cdot) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} f(x, l, \cdot) = \\
& = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} f(0, y, \cdot) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} f(l, y, \cdot) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} f(x, 0, \cdot) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}} f(x, l, \cdot) = 0.
\end{aligned}$$

Разложение решения прямой задачи (1)-(5) в ряд Фурье

Нетривиальные решения прямой задачи ищутся в виде ряда Фурье

$$U(t, x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t) \vartheta_{n,m}(x, y), \quad (7)$$

где

$$u_{n,m}(t) = \int_0^l \int_0^l U(t, x, y) \vartheta_{n,m}(x, y) dx dy, \quad (8)$$

$$\vartheta_{n,m}(x, y) = \frac{2}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y, n, m = 1, 2, \dots$$

Предполагаем, что следующие функции тоже разлагаются в ряд Фурье

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \beta_{n,m} \vartheta_{n,m}(x, y), \\ f(x, y, \cdot) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} f_{n,m}(\cdot) \vartheta_{n,m}(x, y), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{n,m} &= \int_0^l \int_0^l \beta(x, y) \vartheta_{n,m}(x, y) dx dy, \\ f_{n,m}(\cdot) &= \int_0^l \int_0^l f(x, y, \cdot) \vartheta_{n,m}(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя ряды Фурье (7) и (9) в уравнение в частных производных (1), получаем счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно переменной t

$$u''_{n,m}(t) - \mu_{n,m}^{2k} \omega(t) u_{n,m}(t) = \frac{\alpha(t)}{1 + \varepsilon(t) \mu_{n,m}^{2k}} (\beta_{n,m} + f_{n,m}(\cdot)), \quad (11)$$

где $\mu_{n,m}^{2k} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k} (n^{2k} + m^{2k})$.

Счетная система дифференциальных уравнений второго порядка (11) решается вариационным методом произвольных постоянных

$$u_{n,m}(t) = A_{1,n,m} + A_{2,n,m} t + \gamma_{n,m}(t), \quad (12)$$

где $A_{1,n,m}$ и $A_{2,n,m}$ – произвольные постоянные,

$$\gamma_{n,m}(t) = \delta_{n,m}(t) + [\beta_{n,m} + f_{n,m}(\cdot)] h_{n,m}(t),$$

$$\delta_{n,m}(t) = \mu_{n,m}^{2k} \int_0^t (t-s) \omega(s) u_{n,m}(s) ds, h_{n,m}(t) = \int_0^t \frac{\alpha(s)(t-s)}{1 + \varepsilon(s) \mu_{n,m}^{2k}} ds.$$

С помощью коэффициентов Фурье (8) интегральные условия (2) и (3) записываются в следующем виде

$$\begin{aligned} u_{n,m}(T) + \int_0^T u_{n,m}(t) dt &= \int_0^l \int_0^l \left(U(T, x, y) + \int_0^T U(t, x, y) dt \right) \vartheta_{n,m}(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^l \int_0^l \varphi_1(x, y) \vartheta_{n,m}(x, y) dx dy = \varphi_{1,n,m}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} u'_{n,m}(T) + \int_0^T u'_{n,m}(t) t dt &= \int_0^l \int_0^l \left(U_t(T, x, y) + \int_0^T U_t(t, x, y) t dt \right) \vartheta_{n,m}(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^l \int_0^l \varphi_2(x, y) \vartheta_{n,m}(x, y) dx dy = \varphi_{2,n,m}, \end{aligned} \quad (14)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $A_{1,n,m}$ и $A_{2,n,m}$ в (12), воспользуемся условиями (13) и (14). Тогда получим счетную систему интегральных уравнений

$$u_{n,m}(t) = I_1(t; u_{n,m}, \beta_{n,m}) \equiv \varphi_{1,n,m} D_0 + \varphi_{2,n,m} D_1(t) +$$

$$+ (\beta_{n,m} + f_{n,m}(\cdot)) D_{2,n,m}(t) + \int_0^T H_{n,m}(t,s) u_{n,m}(s) ds, \quad (15)$$

где коэффициенты Фурье $\beta_{n,m}$ и $f_{n,m}(\cdot)$ определяются с помощью формул в (10),

$$f_{n,m}(\cdot) = \int_0^l \int_0^l f \left(x, y, \int_0^l \int_0^l \Theta \left(\eta, \xi, \sum_{n,m=1}^{\infty} \beta_{n,m} \vartheta_{n,m}(\eta, \xi) \right) d\eta d\xi \right) \vartheta_{n,m}(x, y) dx dy,$$

$$D_0 = \frac{1}{1+T}, \quad D_1(t) = \frac{t}{1+T} - \frac{2+T}{2(1+T)^2},$$

$$D_{2,n,m}(t) = h_{n,m}(t) - \frac{1}{1+T} \left[\int_0^T h_{n,m}(t) dt + h_{n,m}(T) \right] - \\ - \left(\frac{2+T}{2(1+T)^2} + \frac{t}{1+T} \right) \left[\int_0^T h'_{n,m}(t) t dt + h'_{n,m}(T) \right],$$

$$H_{n,m}(t,s) = \begin{cases} H_{1,n,m}(s), & t \leq s \leq T, \\ H_{2,n,m}(t,s), & 0 \leq s < t, \end{cases}$$

$$H_{1,n,m}(s) = -\frac{\mu_{n,m}^{2k}}{1+T} \left[\frac{2(T-s) + (T-s)^2}{2} + \left(\frac{2+T}{2(1+T)} + s \right) (T-s+1) \right] \omega(s),$$

$$H_{2,n,m}(t,s) = H_{1,n,m}(s) + \mu_{n,m}^{2k}(t-s)\omega(s).$$

Подставляя представление коэффициентов Фурье (15) главной неизвестной функции в ряд Фурье (7), получаем

$$U(t, x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \vartheta_{n,m}(x, y) \left[\varphi_{1,n,m} D_0 + \varphi_{2,n,m} D_1(t) + \right. \\ \left. + (\beta_{n,m} + f_{n,m}(\cdot)) D_{2,n,m}(t) + \int_0^T H_{n,m}(t,s) u_{n,m}(s) ds \right]. \quad (16)$$

Ряд Фурье (16) является формальным решением прямой задачи (1)-(5).

Функция переопределения $\beta(x, y)$

Используя дополнительное условие (6) и учитывая формул в (9) и (10), из ряда Фурье (16) получаем следующую нелинейную счетную систему для коэффициентов Фурье функции переопределения

$$\beta_{n,m} = I_2(t; u_{n,m}, \beta_{n,m}) \equiv \psi_{n,m} \chi_{1,n,m} + \varphi_{1,n,m} \chi_{2,n,m} + \varphi_{2,n,m} \chi_{3,n,m} - \\ - f_{n,m}(\cdot) - \int_0^T \bar{H}_{n,m}(t_0, s) u_{n,m}(s) ds, \quad (17)$$

где

$$f_{n,m}(\cdot) = \int_0^l \int_0^l f \left(x, y, \int_0^l \int_0^l \Theta \left(\eta, \xi, \sum_{n,m=1}^{\infty} \beta_{n,m} \vartheta_{n,m}(\eta, \xi) \right) d\eta d\xi \right) \vartheta_{n,m}(x, y) dx dy,$$

$$\begin{aligned} \chi_{1,n,m} &= \frac{1}{D_{2,n,m}(t_0)}, \quad \chi_{2,n,m} = -\frac{D_0}{D_{2,n,m}(t_0)}, \quad \chi_{3,n,m} = -\frac{D_1(t_0)}{D_{2,n,m}(t_0)}, \\ D_{2,n,m}(t_0) &\neq 0, \quad \bar{H}_{n,m}(t_0, s) = \frac{H_{n,m}(t_0, s)}{D_{2,n,m}(t_0)}, \\ \psi_{n,m} &= \int_0^l \int_0^l \psi(x, y) \vartheta_{n,m}(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя представление (17) в первый из рядов Фурье в (9), получаем

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \vartheta_{n,m}(x, y) \left[\psi_{n,m} \chi_{1,n,m} + \varphi_{1,n,m} \chi_{2,n,m} + \varphi_{2,n,m} \chi_{3,n,m} - \right. \\ &\quad \left. - f_{n,m}(\cdot) - \int_0^T \bar{H}_{n,m}(t_0, s) u_{n,m}(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Однозначная разрешимость системы из счетных систем (15) и (17)

Мы используем следующие известные банаховые пространства: Пространство $B_2(T)$ последовательностей функций $\{u_{n,m}(t)\}_{n,m=1}^{\infty}$ на сегменте $[0; T]$ с нормой

$$\|u(t)\|_{B_2(T)} = \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\max_{t \in [0; T]} |u_{n,m}(t)| \right)^2} < \infty;$$

Гильбертово координатное ℓ_2 пространство $\{\varphi_{n,m}\}_{n,m=1}^{\infty}$ числовых последовательностей с нормой

$$\|\varphi\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{n,m}|^2} < \infty;$$

Пространство $L_2(\Omega_l^2)$ суммируемых с квадратом функций в области Ω_l^2 с нормой

$$\|\vartheta(x, y)\|_{L_2(\Omega_l^2)} = \sqrt{\int_0^l \int_0^l |\vartheta(\eta, \xi)|^2 d\eta d\xi} < \infty.$$

Предполагается, что для гладких функций $D_{2,n,m}(t)$, $\bar{H}_{n,m}(t, s)$ из (15) справедливы следующие условия:

$$!_1 = \max \left\{ \|D_2(t)\|_{B_2(T)}; \|D_2''(t)\|_{B_2(T)} \right\} < \infty, \quad (20)$$

$$!_2 = \max \left\{ \int_0^T \|H_i(t, s)\|_{B_2(T)} ds; \int_0^T \|H_i''(t, s)\|_{B_2(T)} ds \right\} < \infty, \quad (21)$$

$$!_3 = \max \left\{ \int_0^T \|\bar{H}_i(t_0, s)\|_{B_2(T)} ds; \int_0^T \|\bar{H}_i''(t_0, s)\|_{B_2(T)} ds \right\} < \infty, \quad i = 1, 2, \quad (22)$$

$$H_{1,n,m}(t, s) = n^{4k} H_{n,m}(t, s), \quad \bar{H}_{1,n,m}(t_0, s) = n^{4k} \bar{H}_{n,m}(t_0, s).$$

$$H_{2,n,m}(t, s) = m^{4k} H_{n,m}(t, s), \quad \bar{H}_{2,n,m}(t_0, s) = m^{4k} \bar{H}_{n,m}(t_0, s).$$

Условия гладкости. Пусть для функций

$$\varphi_i(x, y), \psi(x, y), \beta(x, y) \in C^{4k}(\Omega_l^2), \quad f(x, y, \cdot) \in C_{x,y}^{4k}(\Omega_l^2 \times R), \quad i = 1, 2$$

в области Ω_l^2 существуют кусочно-непрерывные производные порядка $4k + 1$. Тогда, интегрируя по частям функции (10), (13), (14) и (15) $4k + 1$ раз по каждой переменной x, y , получаем следующие соотношения

$$|\varphi_{i,n,m}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{8k+2} \frac{|\varphi_{i,n,m}^{(8k+2)}|}{n^{4k+1} m^{4k+1}}, \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

$$|\psi_{n,m}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{8k+2} \frac{|\psi_{n,m}^{(8k+2)}|}{n^{4k+1} m^{4k+1}}, \quad (24)$$

где

$$\varphi_{i,n,m}^{(8k+2)} = \int_0^l \int_0^l \frac{\partial^{8k+2} \varphi_i(x, y)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \vartheta_{n,m}(x, y) dx dy, \quad i = 1, 2,$$

$$\psi_{n,m}^{(8k+2)} = \int_0^l \int_0^l \frac{\partial^{8k+2} \psi(x, y)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \vartheta_{n,m}(x, y) dx dy.$$

Здесь справедливы неравенства Бесселя

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} [\varphi_{i,n,m}^{(8k+2)}]^2 \leq \left(\frac{2}{l}\right)^{8k+2} \int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{8k+2} \varphi_i(x, y)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right]^2 dx dy, \quad i = 1, 2, \quad (25)$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} [\psi_{n,m}^{(8k+2)}]^2 \leq \left(\frac{2}{l}\right)^{8k+2} \int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{8k+2} \psi(x, y)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right]^2 dx dy. \quad (26)$$

Также получаем следующие формулы

$$|\beta_{n,m}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{8k+2} \frac{|\beta_{n,m}^{(8k+2)}|}{n^{4k+1} m^{4k+1}}, \quad (27)$$

$$|f_{n,m}(\cdot)| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{8k+2} \frac{|f_{n,m}^{(8k+2)}(\cdot)|}{n^{4k+1} m^{4k+1}}, \quad (28)$$

где

$$\beta_{n,m}^{(8k+2)} = \int_0^l \int_0^l \frac{\partial^{8k+2} \beta(x, y)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \vartheta_{n,m}(x, y) dx dy,$$

$$f_{n,m}^{(8k+2)}(\cdot) = \int_0^l \int_0^l \frac{\partial^{8k+2} f(x, y, \cdot)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \vartheta_{n,m}(x, y) dx dy.$$

Для функций в последних формулах справедливы неравенства Бесселя:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} [\beta_{n,m}^{(8k+2)}]^2 \leq \left(\frac{2}{l}\right)^{8k+2} \int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{8k+2} \beta(x, y)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right]^2 dx dy, \quad (29)$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} [f_{n,m}^{(8k+2)}(\cdot)]^2 \leq \left(\frac{2}{l}\right)^{8k+2} \int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{8k+2} f(x, y, \cdot)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right]^2 dx dy. \quad (30)$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия гладкости, (20)-(22) и следующие условия:

- 1) $|f(x, y, \gamma_1) - f(x, y, \gamma_2)| \leq M_0(x, y) |\gamma_1 - \gamma_2|$; $0 < \|M_0(x, y)\|_{L_2(\Omega_t^2)} < \infty$;
- 2) $|\Theta(x, y, \beta_1) - \Theta(x, y, \beta_2)| \leq \Theta_0(x, y) |\beta_1 - \beta_2|$, $0 < \|\Theta_0(x, y)\|_{L_2(\Omega_t^2)} < \infty$;
- 3) $\rho < 1$, где

$$\rho = \max \left\{ 2!_1 \left(\|M_0(x, y)\|_{L_2(\Omega_t^2)} + \|\Theta_0(x, y)\|_{L_2(\Omega_t^2)} \right); !_2 + !_3 \right\}.$$

Тогда система из счетных систем (15) и (17) однозначно разрешима в пространствах $B_2(T)$ и ℓ_2 . При этом искомое решение может быть найдено из следующего итерационного процесса:

$$\begin{cases} u_{n,m}^0(t) = \varphi_{1,n,m} D_0 + \varphi_{2,n,m} D_1(t), \\ u_{n,m}^{p+1}(t) = I_1(t; u_{n,m}^p, \beta_{n,m}^p), \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \beta_{n,m}^0 = \psi_{n,m} \chi_{1,n,m} + \varphi_{1,n,m} \chi_{2,n,m} + \varphi_{2,n,m} \chi_{3,n,m}, \\ \beta_{n,m}^{p+1} = I_2(t; u_{n,m}^p, \beta_{n,m}^p), \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (32)$$

Доказательство. Мы используем метод сжимающих отображений в пространствах $B_2(T)$ и ℓ_2 . С учетом формул (23) и (24) применяем неравенство Коши-Буняковского и затем применяем неравенства Бесселя (25), (26). Тогда получаем, что справедливы следующие две оценки:

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} |u_{n,m}^0(t)| &\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[|\varphi_{1,n,m}| D_0 + |\varphi_{2,n,m}| \max_{t \in \Omega_T} |D_1(t)| \right] \leq \\ &\leq \left(\frac{l}{\pi}\right)^{8k+2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{|\varphi_{1,n,m}^{(8k+2)}|}{n^{4k+1} m^{4k+1}} D_0 + \left(\frac{l}{\pi}\right)^{8k+2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{|\varphi_{2,n,m}^{(8k+2)}|}{n^{4k+1} m^{4k+1}} \max_{t \in \Omega_T} |D_1(t)| \leq \\ &\leq \left(\frac{l}{\pi}\right)^{8k+2} \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{8k+2} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8k+2} m^{8k+2}}} \times \\ &\times \left[D_0 \left\| \frac{\partial^{8k+2} \varphi_1(x, y)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_t^2)} + D_1 \left\| \frac{\partial^{8k+2} \varphi_2(x, y)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_t^2)} \right] < \infty, \quad (33) \end{aligned}$$

где $D_1 = \max_{t \in \Omega_T} |D_1(t)|$;

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^{\infty} |\beta_{n,m}^0| &\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} [|\psi_{n,m}| \cdot |\chi_{1,n,m}| + \\ &+ |\varphi_{1,n,m}| \cdot |\chi_{2,n,m}| + |\varphi_{2,n,m}| \cdot |\chi_{3,n,m}|] \leq \end{aligned}$$

$$\leq \| \psi \|_{\ell_2} \cdot \| \chi_1 \|_{\ell_2} + \| \varphi_1 \|_{\ell_2} \cdot \| \chi_2 \|_{\ell_2} + \| \varphi_2 \|_{\ell_2} \cdot \| \chi_3 \|_{\ell_2} < \infty. \quad (34)$$

Согласно первому и второму условиям теоремы и оценкам (20)-(22), с учетом формул (23), (24) и неравенства Бесселя (25), (26), для произвольной разности приближения (31) получить

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} | u_{n,m}^{p+1}(t) - u_{n,m}^p(t) | \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} [| \beta_{n,m}^p - \beta_{n,m}^{p-1} | \cdot | D_{2,n,m}(t) | + \\ & \quad + | f_{n,m}^p(\cdot) - f_{n,m}^{p-1}(\cdot) | \cdot | D_{2,n,m}(t) | + \\ & + | f_{n,m}^p(\cdot) - f_{n,m}^{p-1}(\cdot) | \cdot | D_{2,n,m}(t) | + \int_0^T | H_{n,m}(t,s) | \cdot | u_{n,m}^p(s) - u_{n,m}^{p-1}(s) | ds] \leq \\ & \leq!_1 [\| \beta^p - \beta^{p-1} \|_{\ell_2} + \| f^p(\cdot) - f^{p-1}(\cdot) \|_{\ell_2}] +!_2 \| u^p(t) - u^{p-1}(t) \|_{B_2(T)} \leq \\ & \leq!_1 \| \beta^p - \beta^{p-1} \|_{\ell_2} +!_2 \| u^p(t) - u^{p-1}(t) \|_{B_2(T)} + \\ & +!_1 \sum_{n,m=1}^{\infty} \int_0^l \int_0^l M_0(x,y) \left| \int_0^l \int_0^l | \Theta_1(\eta, \xi, \cdot) - \Theta_2(\eta, \xi, \cdot) | d\eta d\xi \right| \vartheta_{n,m}(x,y) dx dy \leq \\ & \leq!_1 \| \beta^p - \beta^{p-1} \|_{\ell_2} +!_2 \| u^p(t) - u^{p-1}(t) \|_{B_2(T)} + \\ & +!_1 \| M_0(x,y) \|_{L_2(\Omega_l^2)} \left| \int_0^l \int_0^l \Theta_0(x,y) \sum_{n,m=1}^{\infty} | \beta_{n,m}^p - \beta_{n,m}^{p-1} | \vartheta_{n,m}(x,y) dx dy \right| \leq \\ & \leq!_1 \left(\| M_0(x,y) \|_{L_2(\Omega_l^2)} + \| \Theta_0(x,y) \|_{L_2(\Omega_l^2)} \right) \cdot \| \beta^p - \beta^{p-1} \|_{\ell_2} + \\ & \quad +!_2 \| u^p(t) - u^{p-1}(t) \|_{B_2(T)}; \quad (35) \end{aligned}$$

Аналогично (35) для произвольной разности приближений (32) получаем оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m=1}^{\infty} | \beta_{n,m}^{p+1} - \beta_{n,m}^p | \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} [| f_{n,m}^p(\cdot) - f_{n,m}^{p-1}(\cdot) | + \\ & \quad + \int_0^T | \bar{H}_{n,m}(t,s) | \cdot | u_{n,m}^p(s) - u_{n,m}^{p-1}(s) | ds] \leq \\ & \leq!_1 \sum_{n,m=1}^{\infty} \int_0^l \int_0^l M_0(x,y) \left| \int_0^l \int_0^l | \Theta_1(\eta, \xi, \cdot) - \Theta_2(\eta, \xi, \cdot) | d\eta d\xi \right| \vartheta_{n,m}(x,y) dx dy + \\ & \quad +!_3 \| u^p(t) - u^{p-1}(t) \|_{B_2(T)} \leq \\ & \leq!_1 \| M_0(x,y) \|_{L_2(\Omega_l^2)} \left| \int_0^l \int_0^l \Theta_0(x,y) \sum_{n,m=1}^{\infty} | \beta_{n,m}^p - \beta_{n,m}^{p-1} | \vartheta_{n,m}(x,y) dx dy \right| + \\ & \quad +!_3 \| u^p(t) - u^{p-1}(t) \|_{B_2(T)} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq !_1 \left(\|M_0(x, y)\|_{L_2(\Omega_t^2)} + \|\Theta_0(x, y)\|_{L_2(\Omega_t^2)} \right) \cdot \|\beta^p - \beta^{p-1}\|_{\ell_2} + \\ &\quad + !_3 \|u^p(t) - u^{p-1}(t)\|_{B_2(T)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Теперь, складывая оценок (35) и (36), получаем

$$\begin{aligned} &\|u^{p+1}(t) - u^p(t)\|_{B_2(T)} + \|\beta^{p+1} - \beta^p\|_{\ell_2} \leq \\ &\leq 2!_1 \left(\|M_0(x, y)\|_{L_2(\Omega_t^2)} + \|\Theta_0(x, y)\|_{L_2(\Omega_t^2)} \right) \cdot \|\beta^p - \beta^{p-1}\|_{\ell_2} + \\ &\leq \rho \cdot \left(\|\beta^p - \beta^{p-1}\|_{\ell_2} + \|u^p(t) - u^{p-1}(t)\|_{B_2(T)} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

где $\rho = \max \left\{ 2!_1 \left(\|M_0(x, y)\|_{L_2(\Omega_t^2)} + \|\Theta_0(x, y)\|_{L_2(\Omega_t^2)} \right); !_2 + !_3 \right\}$.

Согласно третьему условию теоремы, $\rho < 1$. Следовательно, из оценки (37) следует, что операторы в правых частях (15) и (17) сжимающие. Из оценок (33)-(37) следует, что существует единственная неподвижная точка, которая является решением систем из счетных систем (15) и (17) в пространствах $B_2(T)$ и ℓ_2 , соответственно. Теорема доказана.

Сходимость рядов Фурье функции переопределения

Теорема 2. Предположим, что все условия теоремы 1 выполняются. Тогда ряд (19) сходится абсолютно и равномерно.

Доказательство. Пусть $u(t) \in B_2(T)$. Тогда, используя неравенство Коши-Шварца и неравенства Бесселя (30), для ряда (19) получаем оценку

$$\begin{aligned} |\beta(x, y)| &\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} |\vartheta_{n,m}(x, y)| \cdot |\psi_{n,m} \chi_{1,n,m} + \varphi_{1,n,m} \chi_{2,n,m} + \\ &\quad + \varphi_{2,n,m} \chi_{3,n,m} - f_{n,m}(\cdot) - \int_0^T \bar{H}_{n,m}(t_0, s) u_{n,m}(s) ds| \leq \\ &\leq \frac{2}{l} \left[\|\psi\|_{\ell_2} \cdot \|\chi_1\|_{\ell_2} + \|\varphi_1\|_{\ell_2} \cdot \|\chi_2\|_{\ell_2} + \|\varphi_2\|_{\ell_2} \cdot \|\chi_3\|_{\ell_2} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8k+2} m^{8k+2}}} \left\| \frac{\partial^{8k+2} f(x, y, \cdot)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_t^2)} + \|u(t)\|_{B_2(T)} \right] < \infty. \end{aligned} \quad (38)$$

Из оценки (38) следует абсолютно и равномерная сходимость ряда Фурье (19). Теорема доказана.

4. Основная неизвестная функция

Мы определили функцию переопределения в виде ряда Фурье (20). Итак, функция переопределения известна.

Теорема 3. Основная неизвестная функция $U(t, x, y)$ определяется с помощью ряда (16). При этом эта функция непрерывно дифференцируема по переменным, входящим в уравнение (1).

Доказательство. С учетом того, что $u(t) \in B_2(T)$ и формул (20)-(26), получаем оценку

$$\begin{aligned}
|U(t, x, y)| &\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} |\vartheta_{n,m}(x, y)| |\varphi_{1,n,m} D_0 + \varphi_{2,n,m} D_1(t) + \\
&+ (\beta_{n,m} + f_{n,m}(\cdot)) D_{2,n,m}(t) + \int_0^T H_{n,m}(t, s) u_{n,m}(s) ds \Big| \leq \\
&\leq \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{l}{\pi}\right)^{8k+2} \frac{|\varphi_{1,n,m}^{(8k+2)}|}{n^{4k+1} m^{4k+1}} D_0 + \left(\frac{l}{\pi}\right)^{8k+2} \frac{|\varphi_{2,n,m}^{(4km+m)}|}{n^{4k+1} m^{4k+1}} \max_{t \in \Omega_T} |D_1(t)| + \right. \\
&+ (|\beta_{n,m}| + |f_{n,m}(\cdot)|) \cdot |D_{2,n,m}(t)| + \int_0^T |H_{n,m}(t, s)| \cdot |u_{n,m}(s)| ds \Big] \leq \\
&\leq \frac{2}{l} \left[\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{8k+2} \left(\frac{l}{\pi}\right)^{8k+2} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8k+2} m^{8k+2}}} \times \right. \\
&\times \left(D_0 \left\| \frac{\partial^{8k+2} \varphi_1(x, y)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l^2)} + D_1 \left\| \frac{\partial^{8k+2} \varphi_2(x, y)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l^2)} \right) + \\
&\left. + C_1 (\|\beta\|_{\ell_2} + \|f(\cdot)\|_{\ell_2}) + C_2 \|u(t)\|_{B_2(T)} \right] < \infty. \tag{39}
\end{aligned}$$

Из (39) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье (16). Теперь функцию (16) дифференцируем нужное число раз

$$\begin{aligned}
U_{tt}(t, x, y) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \vartheta_{n,m}(x, y) [\varphi_{1,n,m} D_0 + \varphi_{2,n,m} D_1''(t) + \\
&+ (\beta_{n,m} + f_{n,m}(\cdot)) D_{2,n,m}''(t) + \int_0^T H_{n,m}''(t, s) u_{n,m}(s) ds \Big]. \tag{40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}} U(t, x, y) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^{4k} \vartheta_{n,m}(x, y) [\varphi_{1,n,m} D_0 + \varphi_{2,n,m} D_1(t) + \\
&+ (\beta_{n,m} + f_{n,m}(\cdot)) D_{2,n,m}(t) + \int_0^T H_{n,m}(t, s) u_{n,m}(s) ds \Big]. \tag{41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{4k}}{\partial y^{4k}} U(t, x, y) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^{4k} \vartheta_{n,m}(x, y) [\varphi_{1,n,m} D_0 + \varphi_{2,n,m} D_1(t) + \\
&+ (\beta_{n,m} + f_{n,m}(\cdot)) D_{2,n,m}(t) + \int_0^T H_{n,m}(t, s) u_{n,m}(s) ds \Big]. \tag{42}
\end{aligned}$$

Аналогично (40)–(41), мы определим следующие функции в виде разложения в ряды Фурье

$$\frac{\partial^{2k+2} U(t, x, y)}{\partial t^2 \partial x^{2k}}, \frac{\partial^{2k+2} U(t, x, y)}{\partial t^2 \partial y^{2k}}.$$

Доказательство сходимости ряда Фурье сходится с доказательством сходимости ряда (16). Мы покажем абсолютную и равномерную сходимости рядов (41) и (42). С этой целью мы используем формулы (20)-(30). Применяем неравенство Коши-Буняковского и неравенства Бесселя. Тогда получаем

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}} U(t, x, y) \right| \leq \frac{\pi^{4k}}{l^{4k}} \sum_{n,m=1}^{\infty} n^{4k} |u_{n,m}(t)| \cdot |\vartheta_{n,m}(x, y)| \leq \\
& \leq \frac{2\pi^{4k}}{l^{4k}} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{l}{\pi} \right)^{8k+2} \frac{n^{4k} |\varphi_{1,n,m}^{(8k+2)}|}{n^{4k+1} m^{4k+1}} D_0 + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{l}{\pi} \right)^{8k+2} \frac{n^{4k} |\varphi_{2,n,m}^{(8k+2)}|}{n^{4k+1} m^{4k+1}} \max_{t \in \Omega_T} |D_1(t)| + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{l}{\pi} \right)^{8k+2} \left(\frac{n^{4k} |\beta_{n,m}^{(8k+2)}|}{n^{4k+1} m^{4k+1}} + \frac{n^{4k} |f_{n,m}^{(8k+2)}(\cdot)|}{n^{4k+1} m^{4k+1}} \right) \cdot |D_{2,n,m}(t)| + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^T |n^{4k} H_{n,m}(t, s)| \cdot |u_{n,m}(s)| ds \right] \leq \\
& \leq \frac{2\pi^{4k}}{l^{4k}} \left[\left(\sqrt{\frac{l}{\pi}} \right)^{8k+2} \left(\frac{l}{\pi} \right)^{8k+2} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^{8k+2}}} \times \right. \\
& \quad \times \left(D_0 \left\| \frac{\partial^{8k+2} \varphi_1(x, y)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l^2)} + D_1 \left\| \frac{\partial^{8k+2} \varphi_2(x, y)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l^2)} + \right. \\
& \quad \left. + C_1 \left(\left\| \frac{\partial^{8k+2} \beta(x, y)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l^2)} + \left\| \frac{\partial^{8k+2} f(x, y, \cdot)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l^2)} \right) \right. \\
& \quad \left. + C_2 \|u(t)\|_{B_2(T)} \right] < \infty. \tag{43}
\end{aligned}$$

Аналогично (43) получаем, что справедлива оценка

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial^{4k}}{\partial y^{4k}} U(t, x, y) \right| \leq \frac{\pi^{4k}}{l^{4k}} \sum_{n,m=1}^{\infty} m^{4k} |u_{n,m}(t)| \cdot |\vartheta_{n,m}(x, y)| \leq \\
& \leq \frac{2\pi^{4k}}{l^{4k}} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{l}{\pi} \right)^{8k+2} \frac{m^{4k} |\varphi_{1,n,m}^{(8k+2)}|}{n^{4k+1} m^{4k+1}} D_0 + \left(\frac{l}{\pi} \right)^{8k+2} \frac{m^{4k} |\varphi_{2,n,m}^{(8k+2)}|}{n^{4k+1} m^{4k+1}} \max_{t \in \Omega_T} |D_1(t)| + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{l}{\pi} \right)^{8k+2} \left(\frac{m^{4k} |\beta_{n,m}^{(8k+2)}|}{n^{4k+1} m^{4k+1}} + \frac{m^{4k} |f_{n,m}^{(8k+2)}(\cdot)|}{n^{4k+1} m^{4k+1}} \right) \cdot |D_{2,n,m}(t)| + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \left[m^{4k} H_{n,m}(t, s) \cdot |u_{n,m}(s)| ds \right] \leq \\
& \leq \frac{2\pi^{4k}}{l^{4k}} \left[\left(\sqrt{\frac{2}{l}} \right)^{8k+2} \left(\frac{l}{\pi} \right)^{8k+2} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8k+2}m^2}} \times \right. \\
& \times \left(D_0 \left\| \frac{\partial^{8k+2} \varphi_1(x, y)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l^2)} + D_1 \left\| \frac{\partial^{8k+2} \varphi_2(x, y)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l^2)} + \right. \\
& + C_1 \left(\left\| \frac{\partial^{8k+2} \beta(x, y)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l^2)} + \left\| \frac{\partial^{8k+2} f(x, y, \cdot)}{\partial x^{4k+1} \partial y^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l^2) L_2(\Omega_l^m)} \right) \left. \right) + \\
& \left. + C_2 \|u(t)\|_{B_2(T)} \right] < \infty. \tag{44}
\end{aligned}$$

Аналогично (44) устанавливаются следующие утверждения

$$\left| \frac{\partial^{2k+2} U(t, x, y)}{\partial t^2 \partial x^{2k}} \right| < \infty, \quad \left| \frac{\partial^{2k+2} U(t, x, y)}{\partial t^2 \partial y^{2k}} \right| < \infty.$$

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliev B.A., Kerimov V.Z., Yakubov Y.S.: Solvability of a boundary value problem for elliptic differential-operator equations of the second order with a quadratic complex parameter, *Diff. Equ.* 56 (10), 1306-1317 (2020).
2. Ashurov R.R., Mukhiddinova A.T.: Inverse problem of determining the heat source density for the subdiffusion equation, *Diff. Equ.* 56 (12), 1550-1563 (2020).
3. Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Zh.M.: A nonlocal problem for loaded partial differential equations of fourth order, *Bulletin of the Karaganda university-Mathematics* 97 (1), 6-16 (2020).
4. Assanova Anar: An integral-boundary value problem for a partial differential equation of second order, *Turkish Journal of Math.* 43 (4), 1967-1978 (2019).
5. Benney D.J., Luke J.C.: Interactions of permanent waves of finite amplitude // *Journal Math. Phys.* 43, 309–313 (1964).
6. Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Ferreira J.: Existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with strong damping. *Math. Methods in the Appl. Sci.* 24, 1043-1053 (2001).
7. Denisov, A.M., Efimov, A.A.: Iterative method for the numerical solution of an inverse coefficient problem for a system of partial differential equations, *Diff. Equ.* 56 (7), 900-909 (2020).

8. Gordeziani D.G., Avilishbili G.A.: Solving the nonlocal problems for one-dimensional medium oscillation, *Math. Model. [Matematicheskoe modelirovanie]* 12 (1), 94-103 (2000) (in Russian)
9. Heydarzade N. A.: On one nonlocal inverse boundary problem for the second-order elliptic equation, *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics*, 40 (4), 97-109 (2020).
10. Il'in V. A.: Uniqueness of generalized solutions of mixed problems for the wave equation with nonlocal boundary conditions, *Diff. Equ.* 44 (5), 692-700 (2008).
11. Isgenderova G.N., Huseynova A. F.: On solvability of an inverse boundary value problem for the pseudo hyperbolic equation, *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math.* 39 (4), 72-83 (2019).
12. Kadimova L.Sh., Kerbalayeva R.E.: On smoothness of solution for the higher-order partial differential equations. *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math.* 39 (1), 73-82 (2019).
13. Mamedov Kh.R.: Uniqueness of the solution to the inverse problem of scattering theory for the Sturm–Liouville operator with a spectral parameter in the boundary condition, *Math. Notes* 74 (1), 136-140 (2003).
14. Romanov V.G.: Inverse phaseless problem for the electrodynamic equations in an anisotropic medium, *Doklady Math.* 100 (2), 495-500 (2019).
15. Romanov V.G., Yamamoto M.: Phaseless inverse problems with interference waves, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems* 26 (5), 681-688 (2018).
16. Sabitov K.B.: Inverse problems of determining the right-hand side and the initial conditions for the Beam vibration equation, *Diff. Equ.* 56 (6), 761-774 (2020).
17. Whitham G.B.: *Linear and nonlinear waves*, New-York - London - Sydney - Toronto, A Willey-Interscience Publication, 1974.
18. Yuldashev T.K.: Inverse problem for a nonlinear Benney–Luke type integro-differential equations with degenerate kernel, *Russian Mathematics* 60 (9), 53-60 (2016).
19. Yuldashev T.K.: Nonlocal mixed-value problem for a Boussinesq-type integro-differential equation with degenerate kernel, *Ukrainian Math. J.* 68 (8), 1278-1296 (2016).
20. Yuldashev T.K.: Mixed problem for pseudoparabolic integro-differential equation with degenerate kernel, *Diff. Equ.* 53 (1), 99-108 (2017).
21. Yuldashev T.K.: Solvability of a boundary value problem for a differential equation of the Boussinesq type, *Diff. Equ.* 54 (10), 1384-1393 (2018).
22. Yuldashev T.K.: On a boundary-value problem for Boussinesq type nonlinear integro-differential equation with reflecting argument, *Lobachevskii Journal of Math.* 41 (1), 111-123 (2020).

23. Yuldashev T.K.: Nonlocal inverse problem for a pseudohyperbolic-pseudoelliptic type integro-differential equations, *Axioms* 9 (2), ID 45, 21 pp. (2020).
24. Yusifova E.H.: Inverse boundary value problem for one partial differential equation of third order, *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math.* 39 (4), 175-189 (2019).
25. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D.: Nonlocal problem for a nonlinear fractional mixed type integrodifferential equation with spectral parameters. *AIP Conference Proceedings*. 2021. 2365 (060003). 1-19.
26. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D.: On a boundary value problem for Benney–Luke type differential equation with nonlinear function of redefinition and integral conditions. *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics*. 2021. 41 (1). 172-183.
27. Yuldashev T.K. Rakhmonov F.D.: On a Benney–Luke type Differential Equation with Nonlinear Boundary Value Conditions. *Lobachevski Journal of Math.* 2021. 42 (15). 3761-3772.
28. S. Albeverio, S. Lakaev, K. Makarov and Z. Muminov.: The Threshold Effects for the Two-particle Hamiltonians on Lattices., *Comm. Math. Phys.* 262. 91–115 (2006).
29. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D.: Nonlocal inverse problem for a pseudohyperbolic-pseudoelliptic type differential equation. *AIP Conference Proceedings*. 2021. 2365 (060004). 1-20.
30. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D., Ismoilov A.I.: Integro-differential equation of Boussinesq with integral conditions and with a small parameter for mixed derivatives. *Itogi Nauki. VINITI, Moscow*, 2022. 211. P. 114-130. (in Russian).
31. Rakhmonov F. D.: Identification of sources in a boundary value problem for Benney-Luke type differential equation with integral conditions. *Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences*. Tashkent. Uzbekistan. 2023. 6 (3). P. 141-155.
32. Rakhmonov F. D.: Nonlocal boundary value problem for a high-order Benney-Luke type differential equation. *Scientific journal “ACTA NUUZ”*. Tashkent. Uzbekistan. 2023. № 1/1. P. 69-78.
33. Onur Alp Ilhan, Danyal Soybae, Shakirbay G Kasimov, Farhod D Rakhmanov.: Solvability of mixed problems for heat equations with two nonlocal conditions. *Journal Mathematica Slovaca. De Gruyter*. 2022. 72 (6). P. 1573-1584.
34. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D.: Mixed problem for an integro-differential equation with a multidimensional pseudoparabolic operator and nonlinear deviation. *Itogi Nauki. VINITI, Moscow*, 2021. 201. P. 33-43. (in Russian).
35. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D.: Nonlocal Inverse Problem for a Pseudoheperbolic-Pseudoelliptic Type Differential Equation. *Uzbekistan-Malaysia international online conference “Computational Models and Technologies (CMT2020)”*, 24-25 August, 2020.

36. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D.: Nonlocal Problem for a Nonlinear Fractional Mixed Type Integro-Differential Equation with Spectral Parameters. Uzbekistan-Malaysia international online conference "Computational Models and Technologies (CMT2020)", 24-25 August, 2020.

REZYUME

Ikki o'Ichovli fazoda integral shartlar bilan berilgan yuqori juft tartibli Benni-Lyuk tipidagi hususiy hosilali differensial tenglama ko'rib chiqiladi. Chiziqli bo'lmagan teskari masalaning yagona yechilishi o'rganiladi. Hususiy hosilali tenglamaning yechimi regulyar funksiyalar sinfida o'rganiladi. O'zgaruvchilarni ajratishning Furiye qator usuli qo'llaniladi. Teskari masala ikkita chiziqli bo'lmagan integral tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi. Noma'lum funktsiya Furiye koeffitsientining mavjudligi va yagonaligini isbotlashda qisqartirib akslantirish usuli bilan ketma-ket yaqinlashish usuli qo'llaniladi. Olingan Furiye qatorining absolyut va tekis yaqinlashuvini isbotlash uchun Koshi-Shvars tengsizligi va Bessel tengsizligidan foydalaniladi.

Kalit so'zlar: Benni-Lyuk tipidagi tenglama, integral shartlar, teskari masala, chiziqsiz funksional tenglama, nolokal chegaraviy masala, Furiye qatori, yechimning mavjudligi va yagonaligi, Koshi-Shvars tengsizligi va Bessel tengsizligi.

RESUME

In a two-dimensional domain, a Benny-Luc-type partial differential equation of an even higher order with conditions in integral form is considered. We study the unique solvability of a nonlinear inverse problem. The solution of this partial differential equation is studied in the class of regular functions. The method of separation of variables (Fourier series method) is used. The inverse problem is reduced to solving systems of two nonlinear integral equations. When proving the existence and uniqueness of the Fourier coefficient of an unknown function, the method of successive approximation is used in combination with the contraction mapping method. The Cauchy-Schwartz inequality and the Bessel inequality are used to prove the absolute and uniform convergence of the obtained Fourier series.

Key words: Benny-Luc type differential equation, integral conditions, inverse problem, non-linear functional equation, non-local boundary value problem, Fourier series method, existence and uniqueness of solutions, Cauchy-Schwartz inequality and Bessel inequality.

МОДЕЛИРОВАНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В ОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ.

Туйчиева С. Т., Садуллаева М. З. *

РЕЗЮМЕ

В статье рассмотрена моделирования сейсмических волновых полей в однородной пористой среде. Основным моментом работы является воспроизведение распространения сейсмической волны в пористой среде и рекурсивное прослеживание ее распространения. Для проверки расчетов использовался простейший случай области полностью заполненной пористой среды с различными точечными источниками. Воспроизведены все три распространения сейсмической волны во флюидонасыщенной пористой среде для различных точечных источников.

Ключевые слова: пористая среда, модель Френкеля-Био, сейсмические волны, точечный источник, параметры упругости, волновое поле.

Обычно для численного моделирования используется модель Френкеля-Био. Особенностью распространения волнового поля в пористых средах является наличие двух продольных волн. Скорости распространения сейсмических волн в теории Френкеля-Био являются функциями четырех упругих параметров для заданных значений физических плотностей матрицы, жидкости и пористости [1-2]. В 1989 году В.Н.Доровский [3], на общих физических принципах, построил нелинейную математическую модель для пористых сред. В модели Доровского так же, как в теории Френкеля-Био, есть три типа звуковых колебаний: поперечное и два продольных. Отличие от моделей подобных моделям Френкеля-Био, в линеаризованной модели Доровского среда описывается тремя упругими параметрами [4-6]. Параметры упругости взаимно однозначно выражаются тремя скоростями упругих колебаний, что является важным для численного моделирования распространения упругих волн в пористых средах, когда заданными параметрами являются значения скоростей акустических волн, пористости, физических плотностей матрицы и насыщающей жидкости.

В данной работе рассмотрим моделирования сейсмических волновых полей.

Для пробной модели среды рассмотрим численные результаты моделирования сейсмических волновых полей. Заданная модель состоит из однородной пористой среды с физическими характеристиками со следующими параметрами:

$\rho_{0,s}^f = 1.5 \text{ г/см}^3$ – физическая плотность упругого пористого тела;

$\rho_{0,l}^f = 1 \text{ г/см}^3$ – физическая плотность жидкости;

$c_{p1} = 2 \text{ км/с}$, $c_{p2} = 0.45 \text{ км/с}$ – скорости продольных волн;

$c_s = 1.3 \text{ км/с}$ – скорость поперечной волны; $d = 0.1$ – пористость.

*Туйчиева С. Т., Садуллаева М. З. – Ташкентский государственный транспортный университет, sayyora-tohirzoda@mail.ru

Шаг дискретизации по пространственным координатам для разностной сетки задавался согласно условию: 10 узлов на минимальную длину волны. Размер расчетной области по пространству составлял 400 узлов по каждой координате. Таким образом, рассматривается область 12 на 12 километров, период по времени от 0 до 20 секунд с шагом по времени 0.0025 секунды, что удовлетворяет условию сходимости $p \cdot c_{p1} < 1$ [7-8].

Волновое поле моделировалось от точечного источника в центре рассматриваемой области. Временной сигнал в источнике задавался в виде

$$f(t) = \exp\left(-\frac{(2\pi f_0(t-t_0))^2}{\gamma^2}\right) \cdot \sin(2\pi f_0(t-t_0)), \text{ где } \gamma = 4, f_0 = 1\text{Гц}, t_0 = 1.5\text{с},$$

который описывает изменение массовой силы.

Вектор неизвестных параметров уравнения рассматриваем в различных приемниках и в различные времена. Приемники расположены в 3 направлениях согласно рисунку 1

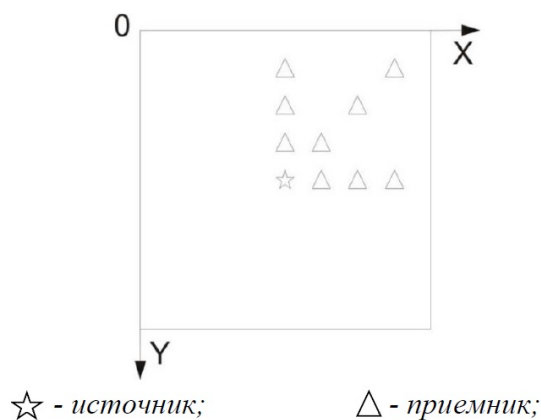


Рис. 1: Схематический график расположения источника и приемников в рассматриваемой области.

Рассмотрим несколько случаев различных правых частей исходной системы уравнений для проверки работы метода и его эффективности.

$$a) \begin{cases} f_x = f(t) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0), \\ f_y = 0. \end{cases}$$

Это соответствует точечному источнику направленного взрыва в направлении.

Для данного случая однородной среды согласно [9], по компоненте u_x должны распространяться три волны: две продольные волны в направлении x и поперечная в направлении y . Рассмотрим различные мгновенные снимки в 3-ю, 4.5-ю, 6-ю секунду, чтобы удостовериться в этом.

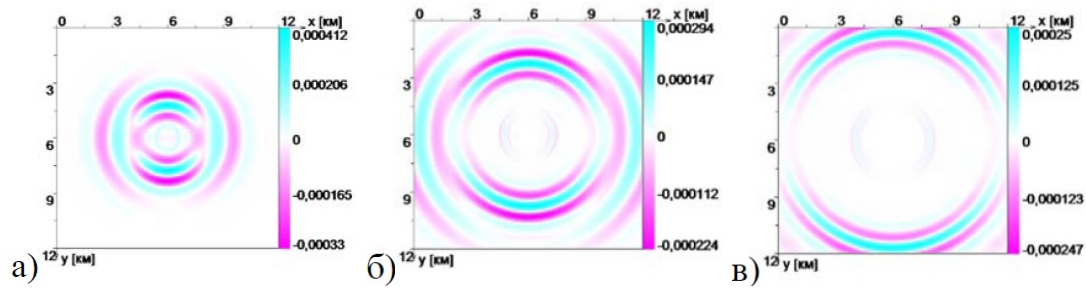


Рис. 2: Мгновенный снимок волнового поля для u_x в моменты времени $t = 3$ секунды (а), $t = 4.5$ секунды (б), $t = 6$ секунд (в).

Все предполагаемые волны присутствуют и в своих направлениях имеют максимум амплитуды.

Рассмотрим данные с приемников и проверим корректность времени прихода волн (по расстоянию до приемника и скорости волны).

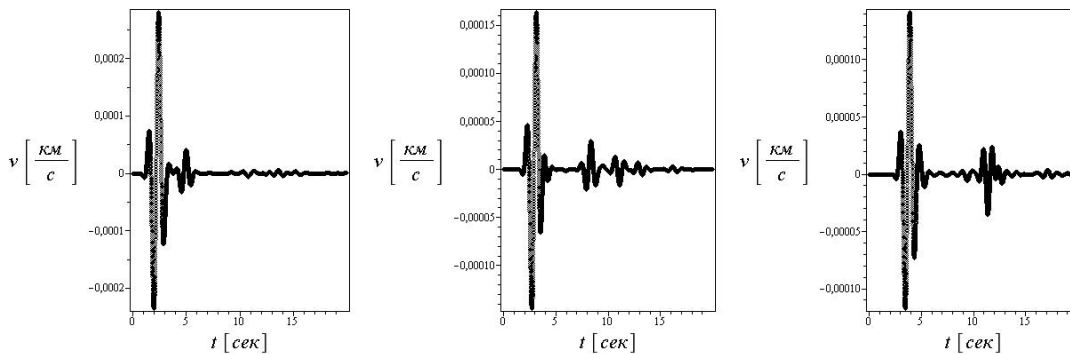


Рис. 3: График волнового поля для u_x в приемнике на расстоянии 1,5 километра (а), 3 километра (б), 4,5 километра (в) от источника в направлении x . Наблюдается распространение 2-х продольных волн

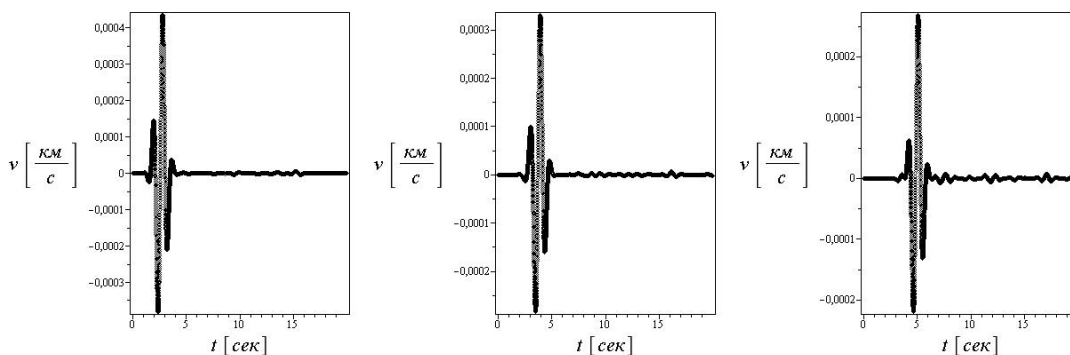


Рис. 4: График волнового поля для u_x в приемнике на расстояние 1,5 километра (а), 3 километра (б), 4,5 километра (в) от источника в направлении y . Наблюдается распространение поперечной волны

Таким образом, по полю u_x распространение волны соответствует ожидаемому, в приемники сигнал приходит в расчетное время, профиль волны сохраняется.

Рассмотрим мгновенные снимки волнового поля для u_y в те же времена: в 3-ю, 4.5-ю, 6-ю секунды:

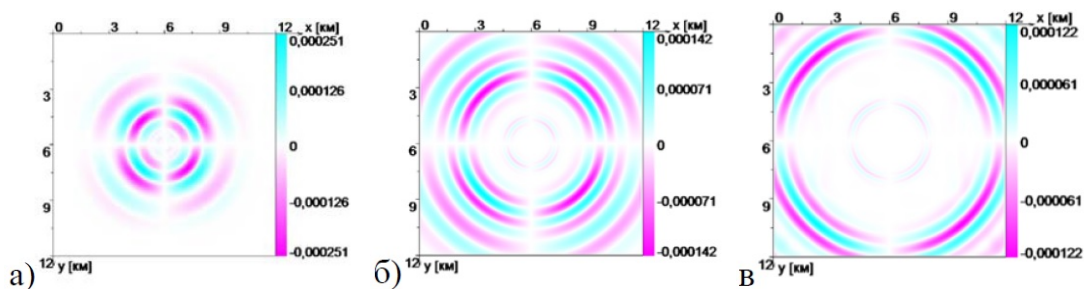


Рис. 5: Мгновенный снимок волнового поля для u_y в моменты времени $t = 3$ секунды (а), $t = 4.5$ секунды (б), $t = 6$ секунд (в).

Мы наблюдаем все те же три волны, которые симметрически меняют фазу по направлениям x и y . В направлениях x и y волны имеют нулевую амплитуду, поэтому рассматривать графики в приемниках не имеет смысла.

Рассмотрим мгновенные съемки волнового поля для v_x в различное время

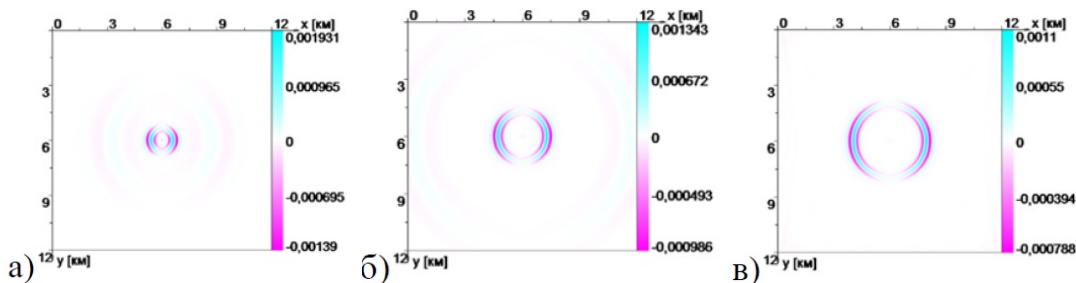


Рис. 6: Мгновенный снимок волнового поля для v_x в моменты времени $t = 3$ секунды (а), $t = 4.5$ секунды (б), $t = 6$ секунд (в).

Наблюдаем распространение только двух продольных волн волнового поля по компоненте v_x , в направлении x они имеют свои максимумы амплитуд.

Рассмотрим данные с приемников и проверим корректность времени прихода волн (по расстоянию до приемника и скорости волны).

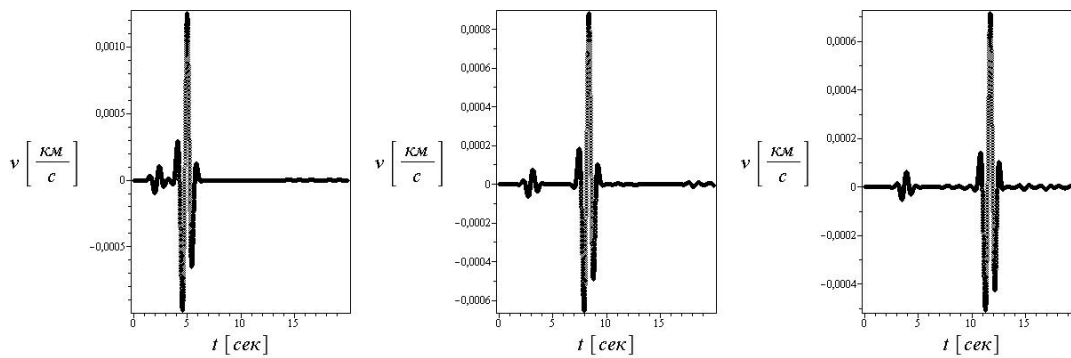


Рис. 7: График волнового поля для v_x в приемниках на расстоянии 1,5 километра (а), 3 километра (б), 4,5 километра (в) от источника в направлении x . Наблюдается распространение двух продольных волн.

Наблюдается сохранение профиля волны, обе продольные волны присутствуют, в приемники сигнал приходит в расчетное время.

Были получены аналогичные выше представленным мгновенные снимки для напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$. Пример такого снимка на рис 8.

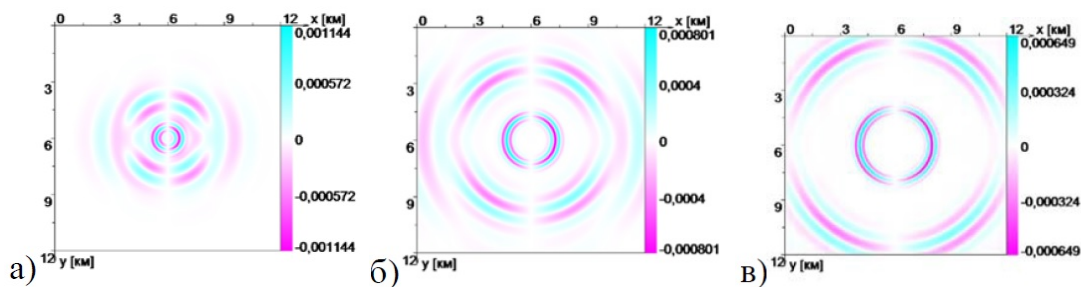


Рис. 8: Мгновенный снимок волнового поля для σ_{xx} в моменты времени $t = 3$ секунды (а), $t = 4.5$ секунды (б), $t = 6$ секунд (в).

Полученные мгновенные снимки для σ_{xx} не могут быть использованы в качестве тестовых, потому что для них нет прямых априорных сведений.

Поэтому весь набор снимков для σ мы не приводим.

Далее представлены мгновенные снимки для давления.

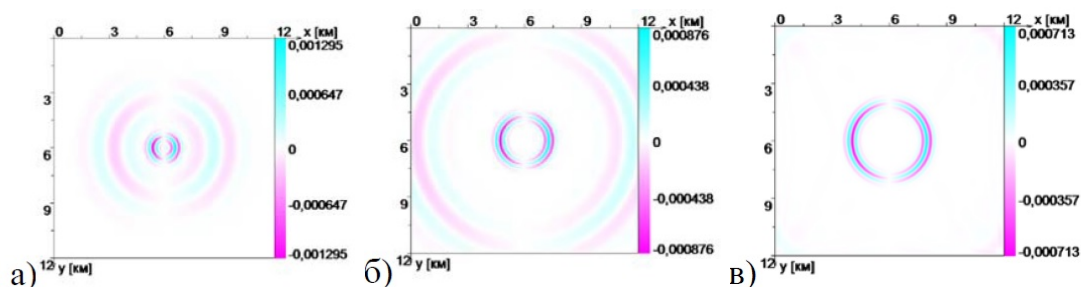


Рис. 9: Мгновенный снимок волнового поля для в моменты времени $t = 3$ секунды (а), $t = 4.5$ секунды (б), $t = 6$ секунд (в).

Наблюдается две ярко выраженных волны, распространяющиеся в направлении x .

Полученные данные расчетов показывают, что разработанная модель для случая направленного точечного взрыва дает верные результаты.

Теперь рассмотрим случай, когда

$$b) \begin{cases} f_x = 0, \\ f_y = f(t) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0). \end{cases}$$

Это соответствует направленному точечному взрыву по оси y , что эквивалентно перестановке x и y . Полученные в расчете соответствующие мгновенные снимки подтверждают это.

Рассмотрим третий случай правой части исходной системы, когда функции правых частей равны:

$$c) \begin{cases} f_x = f(t) \cdot \frac{\partial \delta(x-x_0)}{\partial x} \cdot \delta(y - y_0), \\ f_y = f(t) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \frac{\partial \delta(y-y_0)}{\partial y}. \end{cases}$$

Это соответствует точечному взрыву типа «центр расширения».

Для данного случая однородной среды по компонентам u_x и u_y должны распространиться две продольные волны в направлении x по компонентам u_x и в направлении y по компонентам u_y [9].

Рассмотрим мгновенные снимки в 3-ю, 4.5-ю, 6-ю секунды, чтобы удостовериться в этом.

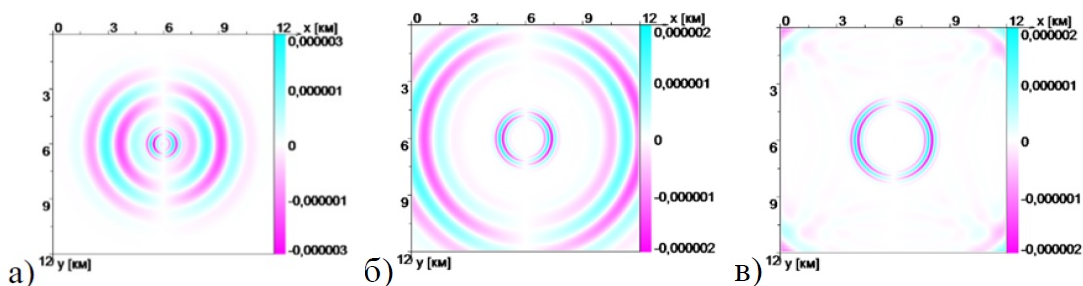


Рис. 10: Мгновенный снимок волнового поля для u_x в моменты времени $t = 3$ секунды (а), $t = 4.5$ секунды (б), $t = 6$ секунд (в).

Все предполагаемые волны присутствуют и в направлении x имеют максимум амплитуды.

Рассмотрим данные с приемников и проверим корректность времени прихода волн (по расстоянию до приемника и скорости волны).

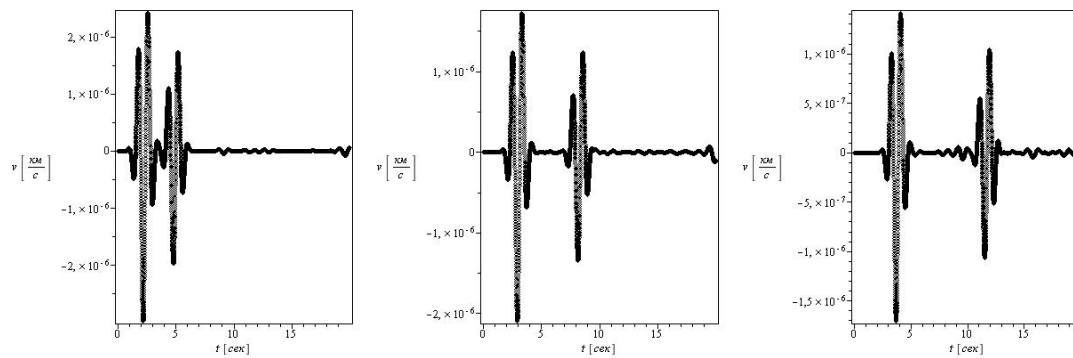


Рис. 11: График волнового поля для в приемнике на расстоянии 1,5 километра (а), 3 километра(б), 4,5 километра(в) от источника в направлении x . Наблюдается распространение двух продольных волн.

Таким образом, по полю u_x распространение волны соответствует ожидаемому, в приемнике сигнал приходит в расчетное время, профиль волны сохраняется.

Рассмотрим мгновенные снимки волнового поля для u_y в те же времена: 3-ю, 4.5-ю, 6-ю секунды:

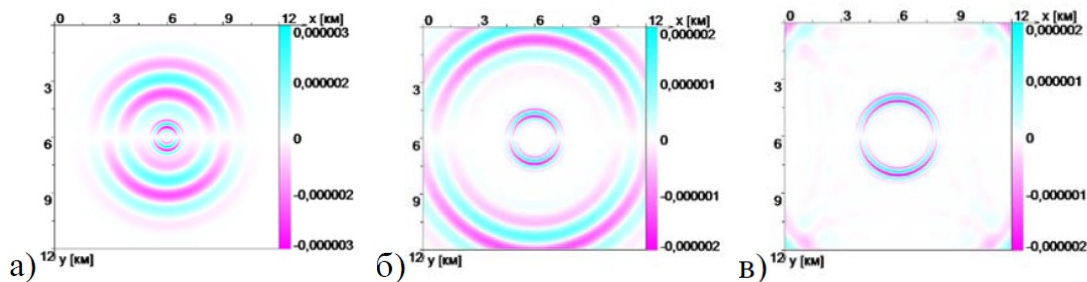


Рис. 12: Мгновенный снимок волнового поля для в моменты времени $t = 3$ секунды (а), $t = 4.5$ секунды (б), $t = 6$ секунд (в).

Все предполагаемые волны присутствуют и в направлении y имеют свой максимум амплитуды.

Рассмотрим данные с приемников и проверим корректность времени прихода волн (по расстоянию до приемника и скорости волн).

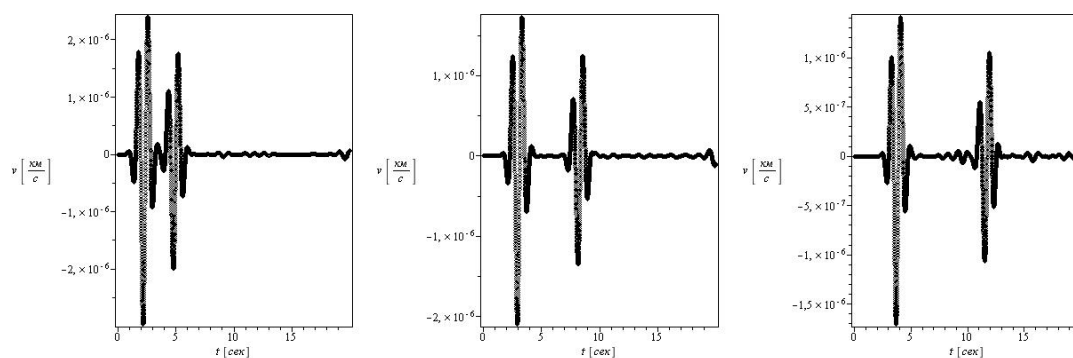


Рис. 13: График волнового поля для u_y в приемнике на расстоянии 1,5 километра (а), 3 километра(б), 4,5 километра(в) от источника в направлении y . Наблюдается распространение двух продольных волн.

Таким образом, по волновому полю u_y распространение волны соответствует ожидаемому, в приемники сигнал приходит в расчетное время, профиль волны сохраняется.

Рассмотрим мгновенные снимки волнового поля v_x в выбранное время

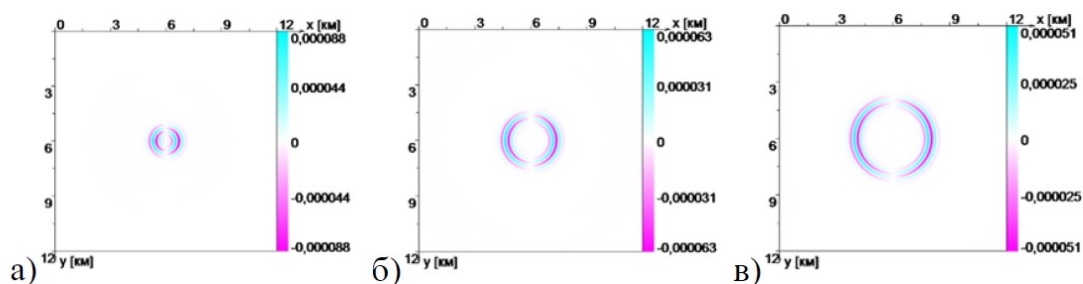


Рис. 14: Мгновенный снимок волнового поля для v_x в моменты времени $t = 3$ секунды (а), $t = 4.5$ секунды (б), $t = 6$ секунд (в).

Наблюдается распространение двух продольных волн в направлении x . Первая волна слабо заметна, т.к. ее амплитуда мала.

Рассмотрим данные с приемников и проверим корректность времени прихода волн (по расстоянию до приемника и скорости волны).

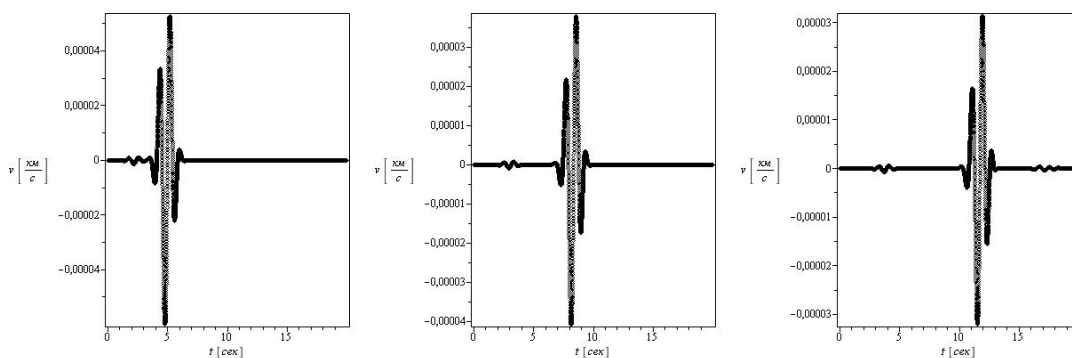


Рис. 15: График волнового поля для v_x в приемнике на расстоянии 1,5 километра (а), 3 километра(б), 4,5 километра(в) от источника в направлении y . Наблюдается распространение двух продольных волн.

Таким образом, по волновому полю v_x распространение волны соответствует ожидаемому, в приемники сигнал приходит в расчетное время, профиль волны сохраняется.

Рассмотрим мгновенные снимки v_y в 3-ю, 4.5-ю, 6-ю секунды.

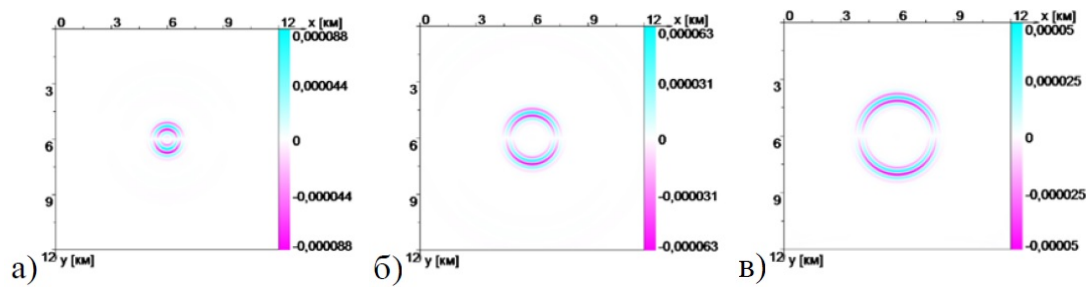


Рис. 16: Мгновенный снимок волнового поля для v_y в моменты времени $t = 3$ секунды (а), $t = 4.5$ секунды (б), $t = 6$ секунд (в).

Наблюдается распространение двух продольных волн в направлении y . Первая волна слабо заметна, т.к. ее амплитуда мала.

Рассмотрим данные с приемников и проверим корректность времени прихода волн (по расстоянию до приемника и скорости волны).

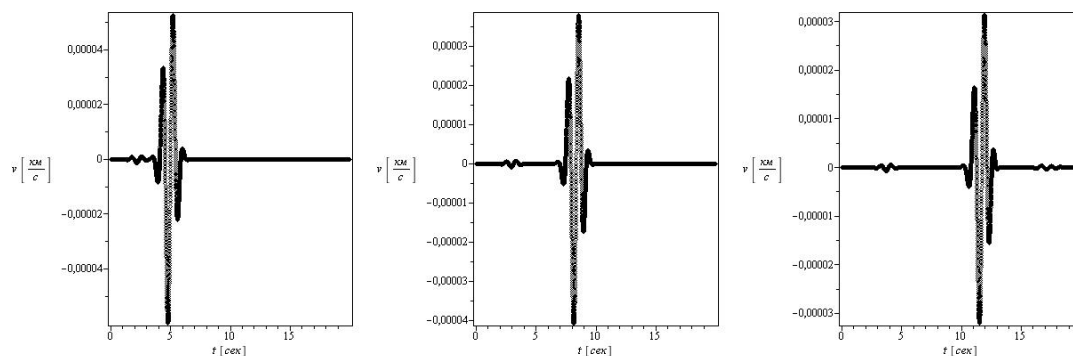


Рис. 17: График волнового поля для v_y в приемнике на расстоянии 1,5 километра (а), 3 километра(б), 4,5 километра(в) от источника в направлении y . Наблюдается распространение двух продольных волн.

Таким образом, по волновому полю v_y распространение волны соответствует ожидаемому, в приемники сигнал приходит в расчетное время, профиль волны сохраняется.

По всем компонентам скорости распространяются две продольные волны. Профиль для всех случаев совпадает с начальным профилем взрывной волны.

Рассмотрим последнюю компоненту системы уравнений - давление p . Т.к. для данного случая используется источник типа «центр расширения», то давление распространяется кругами равномерно по всем направлениям, что подтверждают мгновенные снимки волнового поля p в различные моменты времени.

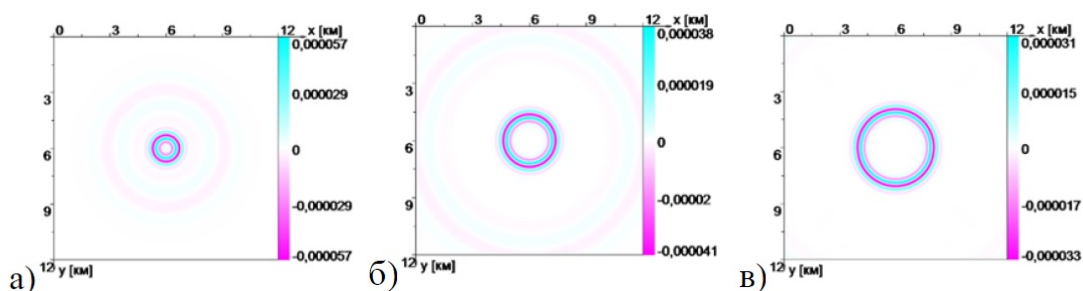


Рис. 18: Мгновенный снимок волнового поля для давления p в моменты времени $t = 3$ секунды (а), $t = 4.5$ секунды (б), $t = 6$ секунд (в).

Сравнение численных и графических результатов с мгновенном снимком волнового поля можно сделать вывод, что разработанная модель для случая направленного точечного взрыва дает верные результаты и верификация предлагаемой расчетной модели и способа ее решения оказалась успешной. Основным моментом работы явилось воспроизведение распространения сейсмической волны в пористой среде и рекурсивное прослеживание ее распространения. Для проверки расчетов использовался простейший случай области полностью заполненной пористой среды с различными точечными источниками.

Приведенные эксперименты показали, что верификация предлагаемой модели оказалась успешной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве. Известия. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.1944. Т.8, №4, с.133-150.
2. Biot M. A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic sol-id. Journal Applied Physics. 1955. V.26, №2, p.182–185.
3. Доровский В.Н. Континуальная теория фильтрации. Геология и геофизика, 1989. №7, с.39-45.
4. Имомназаров Х.Х. Несколько замечаний о системе уравнений Био. Доклады РАН. 2000, Т.373, №4, с.536-537.
5. Imomnazarov Kh.Kh. Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium. Applied Mathematics Letters. 2000. V.13, №3, p.33-35.
6. Blokhin A.M., Dorovsky V.N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. Nova Science. 1995. New York, - 192p.
7. Tychieva S. The symmetric form of a poroelasticity system in terms of velocities, stresses and pressure. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. 2020. 3(2), p.188-199.

8. Имомназаров Х.Х., Гуйчиева С.Т. Сосредоточенная сила в однородной изотропной пористой среде. Интерэкспо Гео-Сибирь. 2015. 4(1), с.201-204.
9. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В., Роменский Е.И. Волновые процессы в насыщенных пористых упруго деформируемых средах. ФГВ. 1993. №1, с.100-111.

REZYUME

Maqolada bir jinsli g'ovakli muhitda seysmik to'lqin maydonlarini modellashtirish muhokama qilinadi. Ishning asosiy nuqtasi seysmik to'lqinning g'ovakli muhitda tarqalishini takrorlash va uning tarqalishini rekursiv kuzatishdir. Hisob-kitoblarni tekshirish uchun biz turli nuqta manbalari bilan to'liq to'ldirilgan g'ovakli muhit mintaqasining eng oddiy holatidan foydalandik. Suyuqlik bilan to'yingan g'ovakli muhitda barcha uchta seysmik to'lqin tarqalishi turli nuqta manbalari uchun takrorlanadi.

Kalit so'zlar: *g'ovak muhit, Frenkel-Biot modeli, seysmik to'lqinlar, nuqta manbai, elastiklik parametrlari, to'lqin maydoni.*

RESUME

The article discusses the modeling of seismic wave fields in a homogeneous porous medium. The main point of the work is to reproduce the propagation of a seismic wave in a porous medium and recursively trace its propagation. To check the calculations, we used the simplest case of a region of a completely filled porous medium with various point sources. All three seismic wave propagations in a fluid-saturated porous medium are reproduced for various point sources.

Key words: *porous medium, Frenkel-Biot model, seismic waves, point source, elasticity parameters, wave field.*